MISCHUNGSMENGEN UND SUBJEKTIVE VORBEWERTUNG IN DER UTILITY-THEORIE

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von

GISELA G. QUIRING

aus Frankfurt/Main

Marburg/Lahn 1979

Druck: Görich & Weiershäuser, Marburg

MISCHUNGSMENGEN UND SUBJEKTIVE VORBEWERTUNG IN DER UTILITY-THEORIE

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von

GISELA G. QUIRING

aus Frankfurt/Main

Marburg/Lahn 1979

Druck: Görich & Weiershäuser, Marburg

Vom Fachbereich Mathematik

der Philipps-Universität Marburg/Lahn

als Dissertation angenommen : 24.3.1979

Tag der mündlichen Prüfung : 3.4.1979

Berichterstatter : Prof. Dr. V. Mammitzsch

Mitberichterstatter : Prof. Dr. J. Lehn

UNIV. LEIDEN BIBL.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

Kapitel I Mischungsmengen und gemischte Mengen 5-32

§1 Die Theorie von von Neumann und Morgenstern .. 5

§2 Die Einbettbarkeit von Mischungsmengen in reelle Vektorräume 12

§3 Gemischte Mengen 25

Kapitel II Subjektive Vorbewertung 33-106

§4 Das Axiomensystem (AX) für die subjektive Vorbewertung 33

4.1 Die Axiome und ihre Unabhängigkeit 34

4.2 Existenz und Eindeutigkeit der subjektiven Vorbewertung 45

§5 Die Axiomensysteme von Anscombe und Aumann, Ferguson, Ferreira und Fishburn 58

5.1 Das Axiomensystem (AN) von Anscombe und Aumann 60

5.2 Das Axiomensystem (FN) von Ferguson 62

5.3 Das Axiomensystem (FI) von Fishburn 64

5.4 Das Axiomensystem (FIS) von Fishburn ... 66

5.5 Das Axiomensystem (FA) von Ferreira 69

§6 Vergleich der vorgestellten Axiomensysteme .. 72

6.1 Die Axiomensysteme (FA) und (AX) 72

6.2 Die Axiomensysteme (FN) und (AX) 88

6.3 Die Axiomensysteme (AN) und (AX) 92

6.4 Die Axiomensysteme (FIS) und (AX) 94

6.5 Die Axiomensysteme (FI) und (AX) 102

6.6 Weitere Bemerkung 104

Symbolverzeichnis 107

Literaturverzeichnis 108

Einleitung

Gegeben sei eine Menge S von "Zuständen der Natur", die sich gegenseitig ausschließen, mit der Eigenschaft, daß stets (genau) ein $s \in S$ eintritt bzw. "wahr" ist. Für eine Person (Statistiker) hänge die Konsequenz jeder ihrer Aktionen (Entscheidungen) davon ab, welcher Zustand der Natur eintritt (wahr ist), ohne daß diese Person (Statistiker) das Eintreten eines dieser Naturzustände durch die Durchführung einer Aktion (Wahl einer Entscheidung) beeinflussen kann. Es ist nicht bekannt, welcher Zustand der Natur eintritt bzw. wahr ist (Entscheidung unter Unsicherheit). Unter den angegebenen Voraussetzungen kann man jedoch für eine (beliebige) Aktion (Entscheidung) jedem möglichen Zustand der Natur die zugehörige Konsequenz dieser Aktion (Entscheidung) zuordnen, d.h. man kann in einem mathematischen Modell jede Aktion (Entscheidung) auffassen als Abbildung f von S in eine Menge X, die die Menge C der Konsequenzen umfaßt. Für einen Statistiker ist diese zu einer Entscheidung gehörende Abbildung f nichts anderes als eine (nichtnumerische) Schadensfunktion.
Wir unterscheiden im folgenden nicht mehr zwischen einer Aktion (Entscheidung) und der zugehörigen Abbildung f und nennen $\mathfrak{F}$ die Menge der Aktionen (Entscheidungen), die einer Person (Statistiker) zur Verfügung stehen.
Ferner sei auf $\mathfrak{F}$ oder auf einer Menge $\mathfrak{F}^*$, die $\mathfrak{F}$ umfaßt, eine binäre Relation $\prec^*$, eine sog. "subjektive Präferenzrelation", und auf X eine subjektive Präferenzrelation $\prec$ gegeben.

Gefragt wird nach der Existenz und Eindeutigkeit einer subjek-

tiven Vorbewertung, d.h. einem Wahrscheinlichkeitsmaß π auf einer geeigneten σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über S mit der Eigenschaft: für $f,g \in \mathcal{F}$ gilt

(*) $g \prec^* f$ genau dann, wenn $\int_S u \circ g(s)\, d\pi(s) < \int_S u \circ f(s)\, d\pi(s)$.

Dabei soll u eine Nutzenfunktion (utility function) auf X sein (vgl. die Definitionen (1.5) und (3.2)). Die Aktion f soll also der Aktion g genau dann vorgezogen werden, wenn der subjektiv erwartete Nutzen der Konsequenzen der Aktion f größer ist als derjenige der Aktion g.

Von Anscombe und Aumann [1], Ferguson [4], Ferreira [5] und Fishburn [8, 11] liegen Axiomensysteme vor, die eine (eindeutige) subjektive Vorbewertung π (mit der Eigenschaft (*)) liefern.

In der vorliegenden Arbeit wird eine weitere Lösung dieses Problems angegeben. Dazu wird die Theorie von von Neumann und Morgenstern wie bei Anscombe und Aumann, Ferguson und Ferreira zweimal angewendet, nämlich auf X und $\mathcal{F}$. Neu ist im Vergleich mit den obengenannten Arbeiten die Anwendung des Satzes von Daniell-Stone, mit dessen Hilfe die Existenz und Eindeutigkeit eines Wahrscheinlichkeitsmaßes π auf einer von $\mathcal{F}$ abhängenden σ-Algebra bewiesen wird mit der Eigenschaft, daß für geeignete Nutzenfunktionen u auf X und w auf $\mathcal{F}$ gilt:

$$w(f) = \int_S u \circ f(s)\, d\pi(s) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}.$$

Während bei Anscombe und Aumann, Ferguson, Ferreira und Fishburn [8] als Aktionenmenge die Menge aller Abbildungen von S in X betrachtet wird, können die Ergebnisse unserer Arbeit auch auf Teilmengen von X^S angewendet werden, falls diese be-

stimmte Voraussetzungen erfüllen.
Fishburn betrachtet in [11] als Aktionen genau die Abbildungen von S in X, die bezüglich einer vorgegebenen σ-Algebra $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}$-$\mathfrak{P}(X)$-meßbar sind und nur zu jeweils endlich vielen verschiedenen Konsequenzen führen. Das bedeutet, daß für solche Aktionen bei geringfügigen Unterschieden der Naturzustände (z.B. Temperatur) die Konsequenzen entweder konstant bleiben oder sich sprunghaft ändern. Wir geben dagegen keine σ-Algebra vor und fordern demzufolge weder die Meßbarkeit der Aktionen noch die Endlichkeit ihres jeweiligen Bildbereiches. Damit werden Probleme der Wahl einer geeigneten σ-Algebra zu einer vorgegebenen Präferenzrelation umgangen. Außerdem wird es möglich, für andere als die von Fishburn untersuchten Aktionenmengen Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit einer subjektiven Vorbewertung zu machen.

Ein zentraler Begriff der Utility-Theorie ist die Mischungsmenge (vgl. Definition (1.3)). Die Anwendung des Satzes von Daniell-Stone und die in der Literatur häufig verwendete Schreibweise der Mischung als Konvexkombination legen nahe zu untersuchen, ob bzw. wann sich eine Mischungsmenge (und damit speziell die Menge $\mathfrak{F}$ der Aktionen) als konvexe Menge auffassen läßt. Mit dieser Frage beschäftigt sich Paragraph 2, nachdem im ersten Paragraphen grundlegende Definitionen und Sätze aus der Utility-Theorie zusammengestellt wurden. An Hand von Beispielen werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Einbettbarkeit einer Mischungsmenge in einen linearen Raum angegeben; die logische Unabhängigkeit dieser Bedingungen wird

diskutiert. In Paragraph 3 wird die Definition der archimedisch schwachgeordneten Mischungsmenge abgeschwächt. Dadurch wird es möglich, das der Arbeit von Anscombe und Aumann zugrundeliegende Axiomensystem von Luce und Raiffa [21] in die folgenden Untersuchungen mit einzuschließen.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der subjektiven Vorbewertung. In Paragraph 4 wird die Vorbewertungs-Struktur eingeführt und gezeigt, daß die in dieser Definition verwendeten Axiome logisch unabhängig sind. Im zweiten Teil dieses Paragraphen wird bewiesen, daß für Vorbewertungs-Strukturen genau eine subjektive Vorbewertung existiert. In Paragraph 6 wird gezeigt, daß sich diese Ergebnisse auf die in Paragraph 5 referierten Arbeiten von Anscombe und Aumann, Ferguson, Ferreira und Fishburn anwenden lassen. Außerdem wird anhand eines Beispiels gezeigt, daß die Ergebnisse von Paragraph 4 die Arbeiten dieser Autoren wesentlich verallgemeinern.

Herrn Prof. Dr. V. Mammitzsch danke ich für die Betreuung dieser Arbeit.

Kapitel I

Mischungsmengen und gemischte Mengen

§1 Die Utility-Theorie von von Neumann und Morgenstern

Von Neumann und Morgenstern haben wohl als erste für ein System von (subjektiven) Präferenzen auf einer Menge X eine axiomatische Formulierung angegeben, die die Existenz einer reellwertigen Funktion auf X gewährleistet, die diese Präferenzordnung in die reellen Zahlen überträgt. Durch diese sog. Nutzenfunktion wird das Ausmaß, in dem ein "Objekt" aus X einem anderen vorgezogen wird, numerisch erfaßt (vgl. [23], Chap.I§3 und Appendix, insbesondere A.3.4.).

Inzwischen liegen andere Axiomatisierungen vor (z.B. von Fishburn [10], Herstein und Milnor [17], Jensen [18], Luce und Raiffa [21], Marschak [22] und Savage [26]), und es wird auch eine Reihe unterschiedlicher Definitionen und Bezeichnungen verwendet. Der Klarheit und Übersichtlichkeit wegen werden deshalb in diesem Paragraphen diejenigen Definitionen und Sätze aus der Utility-Theorie zusammengestellt, die im Verlauf dieser Arbeit benötigt werden.

(1.1) Definition:

a) Eine binäre Relation $\prec$ auf einer Menge X heißt schwache Ordnung, wenn für alle $x,y,z \in X$ gilt

(S1) Wenn $x \prec y$, dann nicht $y \prec x$ (Asymmetrie).

(S2) Wenn nicht $x \prec y$ und nicht $y \prec z$, dann nicht $x \prec z$ (negative Transitivität).

$(X, \prec)$ heißt dann eine schwachgeordnete Menge.

b) Sei $\prec$ eine schwache Ordnung auf X. Dann wird für $x,y \in X$ definiert

(1) $x \sim y$ genau dann, wenn nicht $x \prec y$ und nicht $y \prec x$.

(2) $x \preccurlyeq y$ genau dann, wenn $x \prec y$ oder $x \sim y$.

(1.2) Satz:

Sei $(X, \prec)$ eine schwachgeordnete Menge. Dann gilt für $\preccurlyeq$ und $\sim$ gemäß Definition (1.1)(b)

a) $\preccurlyeq$ ist eine lineare Ordnung, d.h.

(L1) Für $x,y \in X$ gilt $x \preccurlyeq y$ oder $y \preccurlyeq x$ (Linearität).

(L2) Wenn $x,y,z \in X$ und $x \preccurlyeq y$ und $y \preccurlyeq z$, dann $x \preccurlyeq z$ (Transitivität).

b) $\sim$ ist Äquivalenzrelation.

c) $x \sim y$ genau dann, wenn $x \preccurlyeq y$ und $y \preccurlyeq x$.

d) $x \prec y$ genau dann, wenn $x \preccurlyeq y$ und nicht $y \preccurlyeq x$.

Beweis: zu a),b): vgl. [10] Theorem 2.1.

zu c): Sei $x \sim y$. Dann folgt aus Definition (1.1)(b)(2) sofort $x \preccurlyeq y$ und $y \preccurlyeq x$.

Sei umgekehrt $x \preccurlyeq y$ und $y \preccurlyeq x$. Aus der Asymmetrie von $\prec$ und Definition (1.1)(b)(2) folgt $x \sim y$.

zu d): Wegen der Asymmetrie gilt $x \prec y$ genau dann, wenn $x \preccurlyeq y$ und nicht $y \prec x$. Aus Definition (1.1)(b)(1) und den De Morganschen Regeln folgt, daß letzteres äquivalent ist zu $x \prec y$ und nicht $y \prec x$ und nicht $x \sim y$.

Die letzte Aussage ist wegen Definition (1.1)(b)(2) genau dann richtig, wenn $x \lhd y$ und nicht $y \lhd x$.

(1.3) Definition:

Eine Mischungsmenge (X,ϕ) ist eine Menge X mit einer Abbildung ϕ von $[0,1]\times X^2$ in X derart, daß für alle $x,y\in X$ und $\alpha,\beta\in[0,1]$ gilt

(M1) $\phi(1;x,y)=x$,

(M2) $\phi(\alpha;x,y)=\phi(1-\alpha;y,x)$,

(M3) $\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),y)=\phi(\alpha\beta;x,y)$.

Beispiele:

1) Sei A eine konvexe Menge, d.h. eine Teilmenge eines Vektorraums über $\mathbb{R}$, die für jedes $\alpha\in[0,1]$ mit x und y auch die Konvexkombination $\alpha x+(1-\alpha)y$ enthält. Definiere $\psi:[0,1]\times A^2\to A$ gemäß $\psi(\alpha;x,y)=\alpha x+(1-\alpha)y$. Dann ist (A,ψ) Mischungsmenge (vgl. auch [17]).

Speziell: Für eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über M und $m\in M$ bezeichne

$$\varepsilon_m(A) := \begin{cases} 1 , & m\in A \\ 0 , & m\notin A \end{cases}$$ für alle $A\in\mathfrak{A}$ das durch die Einheitsmasse in m definierte Maß auf $\mathfrak{A}$. Als einfaches Wahrscheinlichkeitsmaß auf M werde ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß p auf M bezeichnet, das nur in endlich vielen Punkten aus M Masse hat,

$p=\sum_{i=1}^{n} r_i\varepsilon_{m_i}$ mit $m_i\in M$, $r_i\in\mathbb{R}_0^+ := \{r \mid r\in\mathbb{R},\ r\geq 0\}$ für $i=1,\ldots,n$

und $\sum_{i=1}^{n} r_i=1$. Dann gilt :

Die Menge M^* aller einfachen Wahrscheinlichkeitsverteilungen über einer beliebigen Menge M ist Mischungsmenge. Um dies ein-

zusehen, fasse man M* als Teilmenge des Vektorraumes aller Abbildungen von $\mathcal{P}(M)$ in $\mathbb{R}$ auf.

2) Sei $M=\mathbb{R}^+:=\{r\,|\,r\in\mathbb{R},\ r>0\}$ und n so, daß $n\in\mathbb{N}$ oder $n^{-1}\in\mathbb{N}$. Definiere $\phi_n:[0,1]\times M^2\to M$ gemäß $\phi_n(\alpha;x,y):=(\alpha x^n+(1-\alpha)y^n)^{1/n}$. Dann ist (M,ϕ_n) Mischungsmenge.

3) Sei $M:=\{\mathcal{N}(\mu,\sigma)\,|\,\mu\in\mathbb{R},\ \sigma\in\mathbb{R}^+\}$ die Menge der Gaußverteilungen über $\mathbb{R}$. Definiere $\phi:[0,1]\times M^2\to M$ gemäß
$\phi(\alpha;\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1),\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)):=\mathcal{N}(\alpha\mu_1+(1-\alpha)\mu_2,\ \alpha\sigma_1+(1-\alpha)\sigma_2)$.
Dann ist (M,ϕ) Mischungsmenge.

(1.4) Definition:

Eine archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge $(X,\phi,\prec)$ ist eine Mischungsmenge (X,ϕ) und eine binäre Relation $\prec$ auf X derart, daß für alle $x,y,z\in X$ gilt

(A1) $\prec$ ist eine schwache Ordnung auf X,

(A2) Wenn $x\prec y$ und $0<\alpha<1$, dann $\phi(\alpha;x,z)\prec\phi(\alpha;y,z)$,

(A3) Wenn $x\prec y$ und $y\prec z$, dann gibt es ein $\alpha\in(0,1)$ so, daß $\phi(\alpha;x,z)\prec y$, und ein $\beta\in(0,1)$ so,daß $y\prec\phi(\beta;x,z)$

(Archimedisches Axiom).

Bemerkungen:

1) Aus (A2) folgt, daß für eine archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge $(X,\phi,\prec)$ die Restklassenmenge $X/_\sim$ entweder überabzählbar oder einelementig ist. Zum Beweis vgl. [10] Theorem 8.3(C1).

2) Sei (M,ϕ) eine Mischungsmenge und $\prec$ eine schwache Ordnung auf M. Dann muß $(M,\phi,\prec)$ keine archimedisch schwachgeordnete

Mischungsmenge sein, wie das Beispiel des $\mathbb{R}^2$ mit der Konvexkombination ψ und der lexikographischen Ordnung $\prec$ zeigt. Wegen Beispiel 1) zu Definition (1.3) ist $(\mathbb{R}^2,\psi)$ Mischungsmenge. Aber das Archimedische Axiom ist nicht erfüllt, weil für $(0,0),(1,0),(1,1)\in\mathbb{R}^2$ und alle $\beta\in(0,1)$ gilt $(0,0)\prec(1,0)\prec(1,1)$ und $\psi(\beta;(0,0),(1,1))=(1-\beta,1-\beta)\prec(1,0)$. Die Ausführungen von Skala ([27] Chap.2) und von Krantz, Luce, Suppes und Tversky ([19] Chap.2.1) liefern jeweils zusammen mit Satz (1.6) einen anderen Beweis dafür, daß $(\mathbb{R}^2,\psi,\prec)$ keine archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge ist.

(1.5) Definition:

Sei (X,ϕ) eine Mischungsmenge und $\prec$ eine binäre Relation auf X. Eine reellwertige Funktion u auf X heißt Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\prec)$, wenn für alle $x,y\in X$ und $\alpha\in[0,1]$ gilt

(1) $x\prec y$ genau dann, wenn $u(x)<u(y)$ (Ordnungstreue),

(2) $u(\phi(\alpha;x,y))=\alpha u(x)+(1-\alpha)u(y)$ (Linearität).

$u(x)$ heißt dann der Nutzen von $x\in X$.

Für die Existenz und Eindeutigkeit einer Nutzenfunktion gilt:

(1.6) Satz:

Sei $(X,\phi,\prec)$ eine archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge. Dann gilt:

a) Es existiert eine Nutzenfunktion u auf $(X,\phi,\prec)$.

b) Eine reellwertige Funktion u' auf X ist genau dann Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\prec)$, wenn es reelle Zahlen $q\in\mathbb{R}^+$ und $r\in\mathbb{R}$ gibt derart, daß

$u'(x)=qu(x)+r$ für alle $x\in X$.

Beweis: [10] Theorem 8.4 und [23] Appendix A.2.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch auf die intuitive Bedeutung der an die Präferenzrelation $\prec$ gestellten Forderungen eingehen (vgl. [23],3.6.2). Dabei beschränken wir uns auf den Fall, daß $\phi(\alpha;x,y)$ die Randomisierung von x und y mit Wahrscheinlichkeit α ist, obwohl auch andere, abstrakte Gewichtungen möglich sind, die man aber nicht mehr ohne weiteres interpretieren kann. Diese Einschränkung erscheint auch deshalb sinnvoll, weil die zu interpretierenden Forderungen eine abstrakte Formulierung der für die Utility-Theorie wichtigen Eigenschaften der - zunächst ausschließlich betrachteten - Randomisierungen darstellen.

(1.7) Interpretation:

Wir nennen die Elemente von X im folgenden Objekte. Speziell können Aktionen oder Konsequenzen als Objekte aufgefaßt werden.

Für zwei Objekte x und y und $\alpha\in[0,1]$ ist $\phi(\alpha;x,y)$ interpretierbar als das (randomisierte) Objekt, das mit Wahrscheinlichkeit α zu Objekt x und mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ zu Objekt y führt. Um Aussagen über den Nutzen von Objekten zu erhalten, ist es notwendig, daß auch die randomisierten Objekte in die (subjektiven) Präferenzaussagen einbezogen werden. Deshalb fordert man, daß ϕ in X abbildet, daß also die randomisierten Objekte zu den im Sinne der Präferenz zu beurteilenden Objekten gehören.

(M1) und (M2) sind damit unmittelbar klar.

(M3) beschreibt die Gesetzmäßigkeit der Hintereinanderausführung von zwei Randomisierungen: Es soll irrelevant sein, ob zwei Objekte x und y in einem Schritt mit Wahrscheinlichkeit $\alpha\beta$ randomisiert werden, oder ob zuerst x und y mit Wahrscheinlichkeit β und anschließend $\phi(\beta;x,y)$ und y mit Wahrscheinlichkeit α randomisiert werden.

Die Asymmetrie in (A1) besagt, daß, wenn Objekt y Objekt x vorgezogen wird, nicht Objekt x auch Objekt y vorgezogen werden darf. Zwei Objekte heißen äquivalent, wenn die beurteilende Person indifferent zwischen ihnen ist, wenn sie keines von beiden dem jeweils anderen vorzieht.

Die negative Transitivität und (A2) sind unmittelbar einleuchtend.

(A3) besagt: Wenn y weniger erstrebenswert ist als z, aber erstrebenswerter als x, dann soll - für ein genügend großes α - y dem Objekt $\phi(\alpha;x,z)$ vorgezogen werden. Für ein genügend kleines β wird die Präferenz umgekehrt angegeben werden. Es soll also kein Objekt "unendlich" mehr (bzw. weniger) erwünscht sein als irgendein anderes.

Zur Diskussion und Kritik dieser Axiome sei auf die umfangreiche Literatur verwiesen (bspw. [4], [10], [21] und [26]).

§2 Die Einbettbarkeit von Mischungsmengen in reelle Vektorräume

Die Definition der Mischungsmenge geht auf Herstein und Milnor [17] zurück und wird später von Fishburn übernommen, der zunächst in [7] eine äquivalente Formulierung als "abstract convex set" bezeichnet hatte.

Die Formulierungen der Mischungsmenge von Herstein und Milnor und Fishburn unterscheiden sich von der in Definition (1.3) angegebenen durch die Schreibweise: die Abbildung ϕ wird nicht benannt und das Bild von $(\alpha;x,y)$ wird mit $\alpha x+(1-\alpha)y$ bezeichnet. Diese Schreibweise stimmt mit der einer Konvexkombination zweier Vektoren x und y überein. Ferner bemerken Herstein und Milnor im Anschluß an ihre Definition, daß jede konvexe Teilmenge eines reellen Vektorraumes Mischungsmenge ist, wenn man $\alpha x+(1-\alpha)y$ mit Hilfe der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation erklärt.

Da aber für die Definition der Mischungsmenge keine inneren und äußeren Verknüpfungen vorausgesetzt werden, legen die Schreibweise als Konvexkombination und die Bezeichnung als "abstrakte konvexe Menge" die Frage nahe, ob Mischungsmengen und konvexe Mengen der Struktur nach äquivalent sind. Das wäre genau dann der Fall, wenn sich jede Mischungsmenge (M,ϕ) als konvexe Teilmenge A eines reellen Vektorraumes V auffassen ließe, d.h., wenn eine bijektive Abbildung $f: M\to A$ existierte derart, daß für alle $x,y\in M$ und für alle $\alpha\in[0,1]$ gilt

$$f(\phi(\alpha;x,y)) = \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y).$$

Eine solche Abbildung f nennen wir eine Vektorraum-Einbettung

von (M,ϕ).

Wir zeigen zunächst, daß sich nicht jede Mischungsmenge als konvexe Teilmenge eines reellen Vektorraumes auffassen läßt (Beispiel (2.1)), und leiten an Hand von Beispielen Bedingungen her, die notwendig sind für die Existenz einer Vektorraum-Einbettung einer Mischungsmenge.

(2.1) Beispiel:

Für $n\in\mathbb{N}$ beliebig, aber fest, sei $D_n := \{ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i} \mid x_i \in \{0,1\}\}$.

Definiere $\phi: [0,1]\times D_n^2 \to D_n$ gemäß

$$\phi\left(\alpha; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{2^i}\right) := \sum_{i=1}^{n} \frac{[\alpha x_i + (1-\alpha) y_i]}{2^i} .$$

Dabei sei $[r]$ die größte ganze Zahl $\leq r$.

Behauptung: a) (D_n,ϕ) ist Mischungsmenge.

b) Es existiert keine Vektorraum-Einbettung von (D_n,ϕ).

Beweis: zu a): Die Gültigkeit von (M1) und (M2) ist klar.

zu (M3): Sei $x,y\in D_n$, $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i}$, $y = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{2^i}$.

Falls $\alpha\in\{0,1\}$ oder $\beta=0$ ist die Gültigkeit von (M3) klar.

Sei also $\alpha\in(0,1)$ und $\beta\in(0,1]$. Dann gilt

$$\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{[\alpha[\beta x_i + (1-\beta) y_i] + (1-\alpha) y_i]}{2^i}$$

$$= \sum_{\{i \mid x_i = y_i = 1\}} \frac{\alpha\beta x_i + (1-\alpha\beta) y_i}{2^i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{[\alpha\beta x_i + (1-\alpha\beta) y_i]}{2^i} = \phi(\alpha\beta;x,y) .$$

zu b): Sei $x=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}$, $y=\sum_{i=1}^{n}\frac{0}{2^i}$, $\alpha\in(0,1)$. Dann gilt $\phi(\alpha;x,y)=y$.

Da aber andererseits in einer konvexen Teilmenge A eines reellen Vektorraumes V stets gilt

$\alpha a+(1-\alpha)b\neq \beta a+(1-\beta)b$ für alle $a,b\in A$ mit $a\neq b$ und für alle $\alpha,\beta\in[0,1]$ mit $\alpha\neq\beta$, kann keine Vektorraum-Einbettung von (D_n,ϕ) existieren.

Damit ist eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Vektorraum-Einbettung einer Mischungsmenge (M,ϕ) gefunden:

(M4) $\phi(\alpha;x,y)\neq\phi(\beta;x,y)$ für alle $x,y\in M$, $x\neq y$ und für alle $\alpha,\beta\in[0,1]$, $\alpha\neq\beta$.

Da für eine endliche Mischungsmenge (M4) nicht erfüllt sein kann, gilt der folgende

(2.2) Satz:

Sei (M,ϕ) eine Mischungsmenge mit endlich vielen Elementen $a_1,\ldots,a_n$ $(n\in\mathbb{N})$. Dann gilt:
Für $n>1$ läßt sich (M,ϕ) nicht als konvexe Teilmenge eines reellen Vektorraumes auffassen.
Für $n=1$ läßt sich (M,ϕ) als konvexe Teilmenge eines jeden reellen Vektorraumes auffassen.

Das nächste Beispiel zeigt, daß Bedingung (M4) nicht hinreichend ist.

(2.3) Beispiel:

Es seien w_1, w_2 und w_3 paarweise verschiedene, normierte Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Sei $M:=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x=\gamma w_i,\ \gamma\in[0,1], i=1,2,3\}$.
Definiere $\phi:[0,1]\times M^2\to M$ gemäß

$$\phi(\alpha;x,y) := \begin{cases} (\alpha(\gamma+\delta)-\delta)w_i & \text{falls } x=\gamma w_i, y=\delta w_j, i\neq j, \alpha(\gamma+\delta)\geq\delta \\ (\delta-\alpha(\gamma+\delta))w_j & \text{falls } x=\gamma w_i, y=\delta w_j, i\neq j, \alpha(\gamma+\delta)<\delta \\ (\delta+\alpha(\gamma-\delta))w_i & \text{falls } x=\gamma w_i, y=\delta w_i. \end{cases}$$

Geometrisch heißt das: $\phi(\alpha;x,y)$ liegt so auf dem in M verlaufenden Streckenzug zwischen x und y, daß die Länge des Streckenzuges zwischen $\phi(\alpha;x,y)$ und y sich zur Länge des Streckenzuges zwischen x und y verhält wie α zu 1.

Behauptung: a) (M,ϕ) ist eine Mischungsmenge, die (M4) erfüllt.

b) Es existiert keine Vektorraum-Einbettung von (M,ϕ).

Beweis: zu a): Die Gültigkeit von (M1) folgt sofort aus der Definition von ϕ.

zu (M2): Fall 1: $x=\gamma w_i$, $y=\delta w_j$, $i\neq j$.

Fall 1.1: $\alpha(\gamma+\delta)>\delta$. Dann gilt $(1-\alpha)(\delta+\gamma)<\gamma$ und damit

$\phi(\alpha;x,y)=(\alpha(\gamma+\delta)-\delta)w_i=(\gamma-(1-\alpha)(\delta+\gamma))w_i=\phi(1-\alpha;y,x)$.

Fall 1.2: $\alpha(\gamma+\delta)=\delta$. Dann gilt $(1-\alpha)(\delta+\gamma)=\gamma$ und damit

$\phi(\alpha;x,y)=(\alpha(\gamma+\delta)-\delta)w_i=0w_i=((1-\alpha)(\delta+\gamma)-\gamma)w_j=\phi(1-\alpha;y,x)$.

Fall 1.3: $\alpha(\gamma+\delta)<\delta$. Dann gilt $(1-\alpha)(\delta+\gamma)>\gamma$ und damit

$\phi(\alpha;x,y)=(\delta-\alpha(\gamma+\delta))w_j=((1-\alpha)(\delta+\gamma)-\gamma)w_j=\phi(1-\alpha;y,x)$.

Fall 2: $x=\gamma w_i$, $y=\delta w_i$. Dann gilt

$\phi(\alpha;x,y)=(\delta+\alpha(\gamma-\delta))w_i=(\gamma+(1-\alpha)(\delta-\gamma))w_i=\phi(1-\alpha;y,x)$.

zu (M3): Fall 1: $x=\gamma w_i$, $y=\delta w_j$, $i\neq j$.

Fall 1.1: $\beta(\gamma+\delta)\geq\delta$. Dann ist $\phi(\beta;x,y)=(\beta(\gamma+\delta)-\delta)w_i$ sowie

$$\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),y)=\begin{cases}(\alpha(\beta(\gamma+\delta))-\delta)w_i & \text{falls } \alpha(\beta(\gamma+\delta))\geq\delta \\ (\delta-\alpha(\beta(\gamma+\delta)))w_j & \text{falls } \alpha(\beta(\gamma+\delta))<\delta.\end{cases}$$

Andererseits gilt

$$\phi(\alpha\beta;x,y)=\begin{cases}(\alpha\beta(\gamma+\delta)-\delta)w_i & \text{falls } \alpha\beta(\gamma+\delta)\geq\delta \\ (\delta-\alpha\beta(\gamma+\delta))w_j & \text{falls } \alpha\beta(\gamma+\delta)<\delta,\end{cases}$$

also insgesamt $\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),y)=\phi(\alpha\beta;x,y)$.

Fall 1.2: $\beta(\gamma+\delta)<\delta$. Dann ist $\phi(\beta;x,y)=(\delta-\beta(\gamma+\delta))w_j$ sowie $\alpha\beta(\gamma+\delta)<\delta$ und damit

$\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),y)=(\delta+\alpha(\delta-\beta(\gamma+\delta)-\delta))w_j=(\delta-\alpha\beta(\gamma+\delta))w_j=\phi(\alpha\beta;x,y)$.

Fall 2: $x=\gamma w_i$, $y=\delta w_j$. Dann ist $\phi(\beta;x,y)=(\delta+\beta(\gamma-\delta))w_i$ und damit $\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),y)=(\delta+\alpha(\delta+\beta(\gamma-\delta)-\delta))w_i=(\delta+\alpha\beta(\gamma-\delta))w_i=$
$=\phi(\alpha\beta;x,y)$.

zu (M4): Die Gültigkeit von (M4) folgt direkt aus der Definition von ϕ.

zu b): Sei $0<\alpha<\frac{1}{2}$. Dann ist $\phi(\alpha;w_1,w_3)=(1-2\alpha)w_3=\phi(\alpha;w_2,w_3)$ sowie $w_1\neq w_2$. Da aber in einer konvexen Teilmenge A eines reellen Vektorraumes V für alle $x,y\in A$ und alle $\alpha\in(0,1)$ stets gilt

wenn $\alpha x+(1-\alpha)z=\alpha y+(1-\alpha)z$, dann $x=y$,

kann keine Vektorraum-Einbettung von (M,ϕ) existieren.

Der Beweis von Behauptung (2.3)(b) liefert als weitere notwendige Bedingung für die Existenz einer Vektorraum-Einbettung einer Mischungsmenge (M,ϕ) die "Kürzungsregel"

(M4') Wenn $\phi(\alpha;x,z)=\phi(\alpha;y,z)$ für ein $\alpha\in(0,1)$, dann $x=y$.

Die Forderungen (M4) und (M4') sind nicht logisch unabhängig. Genauer gilt:

(2.4) Satz:

Sei (M,ϕ) eine Mischungsmenge, die (M4') erfüllt. Dann gilt auch (M4).

Beweis: Sei $x,y\in M$ mit $x\neq y$ und $\alpha,\beta\in[0,1]$ mit $\alpha\neq\beta$.

Sei o.B.d.A. $\beta>\alpha$. Dann gilt $0<\delta:=\beta-\alpha\leq 1$.

Fall 1: $\delta=1$. Dann ist $\beta=1$, $\alpha=0$ und aus

$\phi(0;x,y)=y\neq x=\phi(1;x,y)$ folgt die Behauptung.

Fall 2: $\delta<1$. Setze $\varepsilon:=\alpha/(1-\delta)$ und $z:=\phi(\varepsilon;x,y)$.

Dann gilt wegen (M4') und $\delta\in(0,1)$

$\phi(\delta;x,\phi(\varepsilon;x,y))\neq\phi(\delta;y,\phi(\varepsilon;x,y))$.

Wegen $\phi(\delta;x,\phi(\varepsilon;x,y)) \underset{(M2)}{=} \phi(1-\delta;\phi(1-\varepsilon;y,x),x) \underset{(M3)}{=} \phi((1-\delta)(1-\varepsilon);y,x)$

$=\phi(\varepsilon+\delta-\varepsilon\delta;x,y)=\phi(\beta;x,y)$

und $\phi(\delta;y,\phi(\varepsilon;x,y)) \underset{(M2)}{=} \phi(1-\delta;\phi(\varepsilon;x,y),y)$

$\underset{(M3)}{=} \phi((1-\delta)\varepsilon;x,y)=\phi(\alpha;x,y)$

folgt daraus die Behauptung für $\alpha,\beta\in[0,1]$ mit $0<\beta-\alpha<1$.

Bemerkung:

Beispiel (2.3) zeigt, daß (M4') eine echte Verschärfung von (M4) ist.

Die Gültigkeit von (M4') ist notwendig für die Existenz einer Vektorraum-Einbettung von (M,ϕ), aber nicht hinreichend, wie das folgende Beispiel zeigt:

(2.5) Beispiel:

Sei $M:=\{f\mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+$, f hat höchstens endlich viele Nullstellen$\}$. Definiere $\phi:[0,1]\times M^2\to M$ gemäß

$\phi(\alpha;f,g)(s):=(\alpha f(s)^n+(1-\alpha)g(s)^n)^{1/n}$ für alle $s\in\mathbb{R}$, wobei

$n:=|\{s\mid f(s)=g(s)=0\}|+1$.

Behauptung: a) (M,ϕ) ist eine Mischungsmenge, die (M4') erfüllt.

b) Es existiert keine Vektorraum-Einbettung von (M,ϕ).

Beweis: zu a): (M1) und (M2) sind unmittelbar klar.

zu (M3): Sei $N_{f,g}:=\{s|f(s)=g(s)=0\}$. Für $\beta\in(0,1)$ ist $\phi(\beta;f,g)(s)$ genau dann Null, wenn $s\in N_{f,g}$. Daher gilt $N_{\phi(\beta;f,g),g}=N_{f,g}$.

Für $n:=|N_{f,g}|+1$ ist

$$\phi(\alpha;\phi(\beta;f,g),g)=\phi(\alpha;(\beta f^n+(1-\beta)g^n)^{1/n},g)$$
$$=(\alpha(\beta f^n+(1-\beta)g^n)+(1-\alpha)g^n)^{1/n}$$
$$=(\alpha\beta f^n+(1-\alpha\beta)g^n)^{1/n}=\phi(\alpha\beta;f,g).$$

Für $\beta=1$ gilt $(\beta f^n+(1-\beta)g^n)^{1/n}=f$ und damit

$\phi(\alpha;\phi(\beta;f,g),g)=\phi(\alpha;f,g)=\phi(\alpha\beta;f,g)$.

Für $\beta=0$ gilt $(\beta f^n+(1-\beta)g^n)^{1/n}=g$ und damit

$\phi(\alpha;\phi(\beta;f,g),g)=\phi(\alpha;g,g)=g=\phi(\alpha\beta;f,g)$.

zu (M4'): Sei $f,g,h\in M$, $\alpha\in(0,1)$ und $\phi(\alpha;f,h)=\phi(\alpha;g,h)$.

Dann ist $N_{f,h}=N_{g,h}$, weil andernfalls ein $s_0\in(N_{f,h}\setminus N_{g,h})\cup(N_{g,h}\setminus N_{f,h})$ existierte, so daß für $n:=|N_{f,h}|+1$ und $m:=|N_{g,h}|+1$

entweder $\phi(\alpha;f,h)(s_0)=0\neq(\alpha g(s_0)^m)^{1/m}=\phi(\alpha;g,h)(s_0)$

oder $\phi(\alpha;g,h)(s_0)=0\neq(\alpha f(s_0)^n)^{1/n}=\phi(\alpha;f,h)(s_0)$

wäre im Widerspruch zur Voraussetzung.

Daher ist $n=m$ und es gilt für alle $s\in\mathbb{R}$

$(\alpha f(s)^n+(1-\alpha)h(s)^n)^{1/n}=(\alpha g(s)^n+(1-\alpha)h(s)^n)^{1/n}$, woraus

$f(s)=g(s)$ für alle $s\in\mathbb{R}$ folgt, was zu zeigen war.

zu b): Setze $f(s):=\frac{1}{2}$ für alle $s\in\mathbb{R}$, $g(s):=\begin{cases}\frac{1}{2}, & s\neq 0\\ 0, & s=0\end{cases}$,

$h(s):=\begin{cases}1, & s\neq 0\\ 0, & s=0\end{cases}$, sowie $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$.

Dann gilt

$$\phi\left(\tfrac{1}{2};f,g\right)(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & s\neq 0\\ \frac{1}{4}, & s=0\end{cases},\quad \phi\left(\tfrac{1}{2};\phi\left(\tfrac{1}{2};f,g\right),h\right)(s)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & s\neq 0\\ \frac{1}{8}, & s=0\end{cases},$$

$$\phi\left(\tfrac{1}{3};g,h\right)(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{3} & , s\neq 0\\ 0 & , s=0\end{cases}\quad,\quad \phi\left(\tfrac{1}{4};f,\phi\left(\tfrac{1}{3};g,h\right)\right)(s)=\begin{cases}\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\sqrt{3} & , s\neq 0\\ \frac{1}{8} & , s=0\end{cases},$$

also $\phi(\alpha;\phi(\beta;f,g),h)\neq\phi\left(\alpha\beta;f,\phi\left(\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta};g,h\right)\right)$.

Andererseits muß in einer konvexen Menge A aufgrund des Assoziativgesetzes für alle $x,y,z\in A$ und alle $\alpha,\beta\in[0,1]$ mit $\alpha\beta\neq 1$ gelten: $\alpha(\beta x+(1-\beta)y)+(1-\alpha)z=\alpha\beta x+(1-\alpha\beta)\left(\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}y+\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}z\right)$.

Daher kann keine Vektorraum-Einbettung von (M,ϕ) existieren.

Dieses Beispiel liefert als weitere notwendige Bedingung eine Verschärfung von (M3), nämlich

(M3') $\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),z)=\phi\left(\alpha\beta;x,\phi\left(\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta};y,z\right)\right)$ für alle $x,y,z\in M$ und für alle $\alpha,\beta\in[0,1]$ mit $\alpha\beta\neq 1$.

(M3') beschreibt, wie sich bei der "Mischung" von 3 Objekten eine Änderung der Reihenfolge auf die Mischungsgewichte auswirkt.

(M3') und (M4') sind notwendige Bedingungen für die Existenz einer Vektorraum-Einbettung einer Mischungsmenge (M,ϕ). Um zu zeigen, daß sie auch hinreichend sind, verwenden wir den folgenden Satz von Hausner (vgl. [16], S.172, Theorem 3.2).

(2.6) Satz:

Sei M eine Menge und ϕ eine Abbildung von $[0,1]\times M^2$ in M. Ferner gelte für alle $x,y,z\in M$ und alle $p,r\in[0,1]$

(H1) $\phi(p;x,x)=x$.

(M2) $\phi(p;x,y)=\phi(1-p;y,x)$.

(H3) $\phi(p;x,\phi(r;y,z))=\phi\left(p+r-pr;\phi\left(\frac{p}{p+r-pr};x,y\right),z\right)$ falls

$(1-p)(1-r)\neq 1$.

(M4') Wenn $\phi(p;x,z)=\phi(p;y,z)$ für ein $p>0$, dann $x=y$.

Dann existiert ein reeller Vektorraum V und eine Abbildung f von M in V, derart daß

a) f ist eineindeutig.

b) $f(\phi(p;x,y))=pf(x)+(1-p)f(y)$ für $0\leq p\leq 1$.

c) f(M) ist konvex.

d) V ist der von f(M) erzeugte Vektorraum.

e) $0\notin\{z\in V \mid z=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i,\ \sum_{i=1}^{n} p_i=1,\ x_i\in f(M)\}$.

Wir zeigen

(2.7) Lemma:

Sei (M,ϕ) eine Mischungsmenge, die (M3') und (M4') erfüllt. Dann gelten die Voraussetzungen von Satz (2.6).

Beweis: Es ist nur die Gültigkeit von (H1) und (H3) zu zeigen.

zu (H1): Aus (M1), (M2) und (M3) folgt

$\phi(\alpha;x,x)=\phi(\alpha;\phi(1;x,x),x)=\phi(\alpha;\phi(0;x,x),x)=\phi(0;x,x)=\phi(1;x,x)=x$

(vgl. auch Fishburn [10], S.111).

zu (H3): Seien $p,r\in[0,1]$ mit $(1-p)(1-r)\neq 1$.

Setze $\alpha:=p+r-pr$, $\beta:=\frac{p}{p+r-pr}$.

Fall 1: $\alpha\beta\neq 1$. Dann folgt aus (M3')

$$\phi(p;x,\phi(r;y,z))=\phi\left(\alpha\beta;x,\phi\left(\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta};y,z\right)\right)=\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),z)=$$

$$=\phi\left(p+r-pr;\phi\left(\frac{p}{p+r-pr};x,y\right),z\right).$$

Fall 2: $\alpha\beta=1$. Dann gilt $p=1$ und mit (M1) folgt

$$\phi(p;x,\phi(r;y,z))=x=\phi(1;\phi(1;x,y),z)=$$

$$=\phi\left(p+r-pr;\phi\left(\frac{p}{p+r-pr};x,y\right),z\right).$$

Insgesamt gilt

(2.8) Satz:

Eine Mischungsmenge (M,ϕ) läßt sich genau dann als konvexe Teilmenge A eines reellen Vektorraumes V auffassen, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(M3') $\phi(\alpha;\phi(\alpha;x,y),z)=\phi\left(\alpha\beta;x,\phi\left(\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta};y,z\right)\right)$ für alle $x,y,z\in M$ und alle $\alpha,\beta\in[0,1]$ mit $\alpha\beta\neq1$.

(M4') Wenn $\phi(\alpha;x,z)=\phi(\alpha;y,z)$ für ein $\alpha\in(0,1)$, dann $x=y$.

Mit Hilfe der Beispiele (2.1) und (2.5) bewiesen wir die Unabhängigkeit von (M3') und (M4').

(2.9) Satz:

Die in Satz (2.8) an eine Mischungsmenge gestellten Forderungen (M3') und (M4') sind logisch unabhängig.

Beweis: I. (M,ϕ) gemäß (2.5) ist eine Mischungsmenge, die (M4') erfüllt, aber nicht (M3').

II. (D_n,ϕ) gemäß (2.1) ist eine Mischungsmenge, die (M4') nicht erfüllt. Die Gültigkeit von (M3') ist noch zu zeigen.

Sei $x,y,z\in M$, $\alpha,\beta\in[0,1]$ mit $\alpha\beta\neq1$.

Fall 1: $\alpha\in(0,1)$, $\beta\in(0,1)$. Dann ist

$$\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),z)=\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha\left[\beta x_i+(1-\beta)y_i\right]+(1-\alpha)z_i\right]/2^i$$

$$=\sum_{\{i\,|\,x_i=y_i=1\}}\left[\alpha\beta x_i+\alpha(1-\beta)y_i+(1-\alpha)z_i\right]/2^i$$

$$=\sum_{\{i\,|\,x_i=y_i=z_i=1\}}\left(\alpha\beta x_i+(1-\alpha\beta)\left(\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}y_i+\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}z_i\right)\right)/2^i$$

$$=\sum_{\{i\,|\,y_i=z_i=1\}}\left[\alpha\beta x_i+(1-\alpha\beta)\left(\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}y_i+\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}z_i\right)\right]/2^i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha\beta x_i+(1-\alpha\beta)\left[\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}y_i+\frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}z_i\right]\right]/2^i$$

$$=\phi\left(\alpha\beta;x,\phi\left(\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta};y,z\right)\right).$$

Fall 2: $\alpha=0$, $\beta\in[0,1]$. Dann ist

$$\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),z)=\sum_{i=1}^{n}\left[z_i\right]/2^i=\phi\left(\alpha\beta;x,\phi\left(\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta};y,z\right)\right).$$

Fall 3: $\alpha=1$, $\beta\in[0,1)$. Dann ist

$$\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),z)=\sum_{i=1}^{n}\left[\beta x_i+(1-\beta)y_i\right]/2^i=\phi\left(\alpha\beta;x,\phi\left(\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta};y,z\right)\right).$$

Fall 4: $\alpha\in(0,1)$, $\beta=1$. Dann ist

$$\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),z)=\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha x_i+(1-\alpha)z_i\right]/2^i=\phi\left(\alpha\beta;x,\phi\left(\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta};y,z\right)\right).$$

Fall 5: $\alpha\in(0,1)$, $\beta=0$. Dann ist

$$\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),z)=\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha y_i+(1-\alpha)z_i\right]/2^i=\phi\left(\alpha\beta;x,\phi\left(\frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta};y,z\right)\right).$$

Für archimedisch schwachgeordnete Mischungsmengen gilt analog zu den Sätzen (2.8) und (2.9):

(2.10) Folgerung:

a) Eine archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge läßt sich genau dann als konvexe Teilmenge A eines

reellen Vektorraumes V auffassen, wenn (M3') und (M4') erfüllt sind.

b) Die Bedingungen (M3') und (M4') sind für archimedisch schwachgeordnete Mischungsmengen logisch unabhängig.

Beweis: zu a): Jede archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge ist Mischungsmenge. Damit folgt die Behauptung aus Satz (2.8).

zu b): Für jede Mischungsmenge (M,ϕ) ist, wenn man als binäre Relation $\prec$ auf M die leere Menge wählt, $(M,\phi,\prec)$ eine archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge. Daher folgt die Behauptung aus Satz (2.9).

Bemerkungen:

1) Mit den Sätzen (2.8) und (2.9) ist die Frage nach der Einbettbarkeit einer Mischungsmenge in einen Vektorraum vollständig beantwortet. Da sich insbesondere nicht jede Mischungsmenge als konvexe Menge auffassen läßt, haben wir für die Definition der Mischungsmenge (Definition (1.3)) eine andere Schreibweise gewählt als die von Herstein und Milnor [17] und Fishburn [7, 8, 9, 10, 11] verwendete. Auch der von Hausner [16] eingeführten und von Krantz, Luce, Suppes und Tversky [19] und von Pfanzagl [24] übernommenen Schreibweise $x\alpha y$ anstelle von $\phi(\alpha;x,y)$ haben wir uns nicht angeschlossen. Denn im nächsten Kapitel werden verschiedene Mischungsmengen gleichzeitig verwendet, so daß eine einheitliche Schreibweise zu einer Verwechslung der verschiedenen Mischungsoperationen

führen könnte. Letzteres läßt sich durch eine Benennung der Mischungsoperationen vermeiden.

2) Mischungsmengen sind Spezialfälle eines verallgemeinerten Konvexitätsbegriffes von Fuchssteiner [14]: Zu jeder Mischungsmenge (X,ϕ) existiert eine Konvexe Φ, wobei Φ diejenige Abbildung bezeichnet, die jedem $A \subset X$ die von $\Phi^* = \{\phi_\alpha \mid \alpha \in [0,1],\ \phi_\alpha : X^2 \to X$ gemäß $\phi_\alpha(x,y) := \phi(\alpha;x,y)\}$ erzeugte Φ-Hülle $\langle A \rangle$ zuordnet.
Die Φ-Hülle kann dabei analog zu [15] definiert werden, da die dort zusätzlich gemachten topologischen Voraussetzungen nicht für den Beweis verwendet werden, daß Φ Konvexe ist.

§3 Gemischte Mengen

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir die an eine archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge gestellten Forderungen etwas abschwächen.

(3.1) Definition:

Eine Menge X mit einer Abbildung $\phi: [0,1] \times X^2 \to X$ und einer binären Relation $\prec$ heißt archimedisch schwachgeordnete gemischte Menge $(X,\phi,\prec)$, wenn für alle $x,y,z \in X$ gilt:

(A1) $\prec$ ist schwache Ordnung auf X,

(A2) Wenn $x \prec y$ und $0<\alpha<1$, dann $\phi(\alpha;x,z) \prec \phi(\alpha;y,z)$,

(A3) Wenn $x \prec y$ und $y \prec z$, dann gibt es ein $\alpha \in (0,1)$ so, daß $\phi(\alpha;x,z) \prec y$, und ein $\beta \in (0,1)$ so, daß $y \prec \phi(\beta;x,z)$

(Archimedisches Axiom),

und wenn für die Relation $\sim$ auf X gemäß

$x \sim y$ genau dann, wenn nicht $x \prec y$ und nicht $y \prec x$

gilt:

(G1) $\phi(1;x,y) \sim x$,

(G2) $\phi(\alpha;x,y) \sim \phi(1-\alpha;y,x)$,

(G3) $\phi(\alpha;\phi(\beta;x,y),y) \sim \phi(\alpha\beta;x,y)$.

Bemerkungen:

1) Wegen Satz (1.2) ist die Relation $\sim$ in (3.1) eine Äquivalenzrelation.

2) Jede archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge ist eine archimedisch schwachgeordnete gemischte Menge.

3) Die Umkehrung von Bemerkung 2) ist i.a. falsch, wie das

folgende Gegenbeispiel zeigt:

Gegenbeispiel:

Sei $X=\{a,b\}$ mit $a\neq b$ und sei $\phi: [0,1]\times X^2 \to X$ definiert gemäß $\phi(\alpha;x,y)\equiv a$. Die Relation $\prec$ auf X sei leer.

$(X,\phi,\prec)$ ist keine archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge, weil wegen $\phi(1;b,b)=a\neq b$ Forderung (M1) verletzt ist.

Wegen $b\sim a$ ist $(X,\phi,\prec)$ aber archimedisch schwachgeordnete gemischte Menge.

4) Die Axiome (G2) und (G3) wurden schon von Fishburn [6] eingeführt. In späteren Publikationen fordert Fishburn stets "=" anstelle von "~".

Die folgende Definition ist eine Verallgemeinerung von Definition (1.5).

(3.2) Definition:

Sei X eine Menge, ϕ eine Abbildung von $[0,1]\times X^2$ in X und $\prec$ eine binäre Relation auf X. Eine reellwertige Funktion u auf X heißt Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\prec)$, wenn für alle $x,y\in X$ und alle $\alpha\in[0,1]$ gilt

(1) $x\prec y$ genau dann, wenn $u(x)<u(y)$,

(2) $u(\phi(\alpha;x,y))=\alpha u(x)+(1-\alpha)u(y)$.

$u(x)$ heißt dann der Nutzen von $x\in X$.

Analog zu Satz (1.6) gilt

(3.3) Satz:

Sei $(X,\phi,\prec)$ eine archimedisch schwachgeordnete gemischte Menge. Dann gilt:

a) Es existiert eine Nutzenfunktion u auf $(X,\phi,\precsim)$.

b) Eine reellwertige Funktion u' auf X ist genau dann Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\precsim)$, wenn es reelle Zahlen $q\in\mathbb{R}^+$ und $r\in\mathbb{R}$ gibt derart, daß

$u'(x)=qu(x)+r$ für alle $x\in X$.

Beweis: Den Beweis dieses Satzes erhält man aus dem Beweis von Satz (1.6) in [10], indem man an den Stellen, an denen die Axiome (M1) bis (M3) und Folgerungen aus ihnen benutzt werden, jeweils "=" durch "~" ersetzt.

Zum Abschluß dieses Paragraphen betrachten wir die Axiomatisierung der Utility von Luce und Raiffa [21] und zeigen, daß jedes System, das diese Axiome erfüllt, zu einer archimedisch schwachgeordneten gemischten Menge erweitert werden kann.

(3.4) Definition:

Sei C eine Menge, C_1 die Menge der einfachen Wahrscheinlichkeitsverteilungen über C, C_2 die Menge der einfachen Wahrscheinlichkeitsverteilungen über $C\cup C_1$ und $\precsim$ eine binäre Relation auf $C\cup C_1\cup C_2$.[1)]

Ferner seien Relationen $\prec$ und ~ auf $C\cup C_1\cup C_2$ definiert gemäß

---

1) Im folgenden schreiben wir eine einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung auch in der Form $(p_1c_1,\ldots,p_kc_k)$ anstelle von $\sum_{i=1}^{n} p_i\varepsilon_{c_i}$. Diese Schreibweise wird in der Literatur häufig verwendet (vgl. [1], [4], [5] und [21]).

(1) $x \prec y$ genau dann, wenn $x \preccurlyeq y$ und nicht $y \preccurlyeq x$,

(2) $x \sim y$ genau dann, wenn $x \preccurlyeq y$ und $y \preccurlyeq x$.

$(C, C_1, \preccurlyeq)$ erfüllt das Axiomensystem von Luce und Raiffa genau dann, wenn gilt:

(LR1) (i) $\preccurlyeq$ ist linear und transitiv auf C.

(ii) Es existieren $c', c'' \in C$ so, daß $c' \prec c''$ sowie $c' \preccurlyeq c$, $c \preccurlyeq c''$ für alle $c \in C$.

(LR2) Wenn $x_i = (p_{i1}c_1, \ldots, p_{ik}c_k)$ für $i=1,\ldots,s$, wobei $c_j \in C$ für $j=1,\ldots,k$, dann

$(q_1x_1, \ldots, q_sx_s) \sim (p_1c_1, \ldots, p_kc_k)$ mit

$$p_j = \sum_{i=1}^{s} q_i p_{ij} \quad \text{für } j=1,\ldots,k.$$

(LR3) Zu $c \in C$ existiert $u_c \in [0,1]$ so, daß

$c \sim ((1-u_c)c', u_c c'') =: \tilde{c}$.

(LR4) $(p_1c_1, \ldots, p_ic_i, \ldots, p_kc_k) \sim (p_1c_1, \ldots, p_i\tilde{c}_i, \ldots, p_kc_k)$.

(LR5) $\preccurlyeq$ und $\sim$ sind transitiv auf $C_1 \cup C_2$.

(LR6) $((1-p')c', p'c'') \preccurlyeq ((1-p)c', pc'')$ genau dann, wenn $p' \leq p$.

Bemerkung:

Zur Interpretation und Diskussion dieser Axiome vgl. [21], S. 24-29.

(3.5) Satz:

Wenn $(C, C_1, \preccurlyeq)$ das Axiomensystem von Luce und Raiffa erfüllt, dann gibt es eine Funktion u von $C \cup C_1 \cup C_2$ in IR mit

(1) $x \preccurlyeq y$ genau dann, wenn $u(x) \leq u(y)$ für alle $x,y \in C \cup C_1 \cup C_2$

und

(2) Wenn $x=(p_1b_1,\ldots,p_kb_k)$, $b_i \in C \cup C_1$ für $i=1,\ldots,k$, dann

$$u(x)= \sum_{i=1}^{k} p_i u(b_i).$$

u ist eindeutig bis auf positive, lineare Transformation.

Beweis: Analog zum Beweis in [21] Chap.2. Dort wird die Behauptung nur für endliches C formuliert. Diese Einschränkung ist aber für den Beweis nicht notwendig, wie Anscombe und Aumann in [1] angemerkt haben.

(3.6) Satz:

$(C,C_1,\preccurlyeq)$ erfülle das Axiomensystem von Luce und Raiffa.

Sei $Y:=C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, wobei $C_n:=\{y \mid y$ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über $C \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k\}$ für $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

$\preccurlyeq$ werde zu einer Relation auf ganz Y fortgesetzt, indem man, ausgehend von einer Funktion u auf $C \cup C_1 \cup C_2$ gemäß Satz (3.5), eine Funktion u auf C_n $(n \geq 3, n \in \mathbb{N})$ rekursiv definiert gemäß $u((q_1y_1,\ldots,q_sy_s)) := \sum_{i=1}^{s} q_i u(y_i)$ und dann $\preccurlyeq$ von $C \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k$ nach $C \cup \bigcup_{k=1}^{n} C_k$ fortsetzt gemäß

$x \preccurlyeq y$ genau dann, wenn $u(x) \leq u(y)$ für alle $x,y \in C \cup \bigcup_{k=1}^{n} C_k$.

Ferner werde $\phi:[0,1] \times Y^2 \to Y$ definiert gemäß $\phi(\alpha;x,y) := (\alpha x,(1-\alpha)y)$. Dann gilt:

$(Y,\phi,\prec)$ ist archimedisch schwachgeordnete gemischte Menge, wenn man $\prec$ auf Y analog zu (3.4)(1) definiert.

Für den Beweis des Satzes verwenden wir das folgende Lemma, das ähnlich wie Satz (1.2) bewiesen wird.

(3.7) Lemma:

Sei $\preccurlyeq$ eine lineare Ordnung auf X. Definiere für $x,y\in X$

(1) $x\prec y$ genau dann, wenn $x\preccurlyeq y$ und nicht $y\preccurlyeq x$.

(2) $x\sim y$ genau dann, wenn $x\preccurlyeq y$ und $y\preccurlyeq x$.

Dann ist $\prec$ schwache Ordnung auf X und es gelten (1) und (2) aus Definition (1.1)(b).

Beweis von Satz (3.6):

zu (A1): Nach Definition von $\preccurlyeq$ und u gilt

(i) $x\preccurlyeq y$ genau dann, wenn $u(x)\leq u(y)$ für alle $x,y\in Y$.

Daraus folgt, da $\leq$ linear und transitiv auf $\mathbb{R}$, daß $\preccurlyeq$ lineare Ordnung auf Y. Wegen Lemma (3.7) ist dann $(Y,\prec)$ eine schwachgeordnete Menge.

zu (A2): Nach Definition von u auf Y gilt

(ii) $u(\phi(\alpha;x,y))=u((\alpha x,(1-\alpha)y))=\alpha u(x)+(1-\alpha)u(y)$ für alle $x,y\in Y$, $\alpha\in[0,1]$.

Es seien $x,y,z\in Y$ mit $x\prec y$ und $\alpha\in(0,1)$. Dann ist wegen (i) $\alpha u(x)+(1-\alpha)u(z)<\alpha u(y)+(1-\alpha)u(z)$ und mit (ii) und (i) folgt $\phi(\alpha;x,z)\prec\phi(\alpha;y,z)$.

zu (A3): Seien $x,y,z\in Y$ mit $x\prec y$ und $y\prec z$. Dann existiert wegen (i) und wegen des Archimedischen Axioms in $\mathbb{R}$ ein $n\in\mathbb{N}$ so, daß $n(u(y)-u(x))>u(z)-u(x)$, und für $0<1-\alpha<n^{-1}$ gilt $\alpha\in(0,1)$

und wegen (ii) $\phi(\alpha;x,z) \prec y$.

Analog existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, daß $m(u(z)-u(y)) > u(z)-u(x)$, und für $0 < \beta < m^{-1}$ gilt $\beta \in (0,1)$ und $y \prec \phi(\beta;x,z)$.

zu (G1) bis (G3): Damit die Relation $\sim$ auf Y die Relation $\sim$ auf $C \cup C_1 \cup C_2$ in (3.4)(2) fortsetzt, muß man sie wie in (3.7)(2) definieren durch

$x \sim y$ genau dann, wenn $x \not\prec y$ und $y \not\prec x$ für alle $x,y \in Y$.

Da $\prec$ lineare Ordnung auf Y ist, liefert Lemma (3.7), daß $\sim$ mit der in (3.1) definierten Relation übereinstimmt.

Aus (i) folgt $x \sim y$ genau dann, wenn $u(x)=u(y)$ für alle $x,y \in Y$.

Zusammen mit (ii) folgt daraus sofort die Gültigkeit von (G1) bis (G3).

Bemerkungen:

1) Wenn $(C,C_1,\prec)$ das Axiomensystem von Luce und Raiffa erfüllt, existiert eine Einbettung in eine archimedisch schwachgeordnete gemischte Menge (Satz (3.6)). Dagegen kann $(C,C_1,\prec)$ i.a. nicht zu einer archimedisch schwachgeordneten Mischungsmenge erweitert werden; eine solche Erweiterung existiert nur, wenn die folgende Verschärfung von (LR2) erfüllt ist:

(LR2') Wenn $x_i=(p_{i1}c_1,\ldots,p_{ik}c_k)$ für $i=1,\ldots,s$,

wobei $c_j \in C$ für $j=1,\ldots,k$,

dann $(q_1x_1,\ldots,q_sx_s)=(p_1c_1,\ldots,p_kc_k)$ mit $p_j=\sum_{i=1}^{s} q_ip_{ij}$

für $j=1,\ldots,k$.

2) In Paragraph 4 werden wir anstelle der archimedisch schwachgeordneten Mischungsmengen nur archimedisch schwachgeordnete gemischte Mengen fordern. Dadurch wird es möglich zu zeigen,

daß das im nächsten Paragraphen formulierte Axiomensystem den von Anscombe und Aumann [1] behandelten Fall einschließt.

Kapitel II

Subjektive Vorbewertung

§4 Das Axiomensystem (AX) für die subjektive Vorbewertung

In diesem Kapitel sei S eine Menge von Zuständen der Natur und C eine Menge von Konsequenzen. Die Aktionenmenge $\mathcal{F}$ sei eine Menge von Abbildungen von S in eine Menge X, die C umfaßt. Ferner sei auf X eine binäre Relation, die sog. subjektive Präferenzrelation $\prec$ und auf $\mathcal{F}$ oder einer Menge $\mathcal{F}^*$, die $\mathcal{F}$ umfaßt, eine subjektive Präferenzrelation $\prec^*$ gegeben.

Gefragt wird nach Voraussetzungen, die die Existenz und Eindeutigkeit einer subjektiven Vorbewertung liefern. Unter einer subjektiven Vorbewertung wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß π auf einer geeigneten σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über S verstanden mit der Eigenschaft, daß für alle $f,g \in \mathcal{F}$ gilt

$$g \prec^* f \text{ genau dann, wenn } \int_S u \circ g(s)\, d\pi(s) < \int_S u \circ f(s)\, d\pi(s).$$

Dabei soll u eine Nutzenfunktion auf X sein.
Eine Aktion f soll also genau dann einer Aktion g vorgezogen werden, wenn der subjektiv erwartete Nutzen der Konsequenzen der Aktion f größer ist als der der Aktion g.

Wir geben in diesem Paragraphen eine eigene Lösung dieses Problems. Im ersten Teil wird die Vorbewertungs-Struktur eingeführt. Für die in dieser Definition verwendeten Axiome wird die intuitive Bedeutung formuliert. Ferner wird bewiesen, daß diese Axiome logisch unabhängig sind. Im zweiten Teil wird mit

Hilfe des Satzes von Daniell-Stone gezeigt, daß für Vorbewertungs-Strukturen genau eine subjektive Vorbewertung existiert.

4.1 Die Axiome und ihre Unabhängigkeit

Aktionen sind als Funktionen von S in X nicht notwendig reellwertig, so daß Maximum und Infimum von Aktionen nicht erklärt sein müssen. Falls eine Nutzenfunktion u auf X existiert, ist aber die folgende Definition sinnvoll.

(4.1) Definition:

Sei $(X,\phi,\prec)$ eine archimedisch schwachgeordnete gemischte Menge und $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionen von S in X. Ferner sei u Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\prec)$.

a) Sei $f,g\in\mathcal{F}$. Dann heißt $k:S\to X$ Maximum von f und g, wenn gilt

$u(k(s))= \max (u(f(s)),u(g(s)))$ für alle $s\in S$.

b) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{F}$ heißt (punktweise) monoton fallend, wenn gilt

$f_{n+1}(s)\preceq f_n(s)$ für alle $s\in S$, $n\in\mathbb{N}$.

c) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Funktionen aus $\mathcal{F}$. Dann heißt $f:S\to X$ Infimum der f_n, wenn gilt

$$u(f(s))= \inf_{n\in\mathbb{N}} u(f_n(s)) \quad \text{für alle } s\in S.$$

Bemerkungen:

1) Wegen Satz (3.3) ist Definition (4.1) unabhängig von der Wahl der Nutzenfunktion u.

2) Sei k Maximum von f und g. Dann ist auch jedes Element h aus der Menge $Max(f,g) := \{h \mid h:S \to X,\ h(s) \sim k(s) \text{ für alle } s \in S\}$ Maximum von f und g.
Entsprechend werde für eine monoton fallende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ $Inf(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert.

Definition (4.1) wird für die Definition der Vorbewertungs-Struktur verwendet.

(4.2) Definition:

Sei S eine Menge, $(X,\phi,\preceq)$ eine archimedisch schwachgeordnete gemischte Menge, $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionen von S in X, die abgeschlossen ist gegenüber der durch $\phi^*(\alpha;f,g)(s) := \phi(\alpha;f(s),g(s))$ für alle $s \in S$ definierten Mischungsoperation $\phi^*: [0,1] \times \mathcal{F}^2 \to X^S$, und $\preceq^*$ eine binäre Relation auf $\mathcal{F}$.
$(S,(X,\phi,\preceq),(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*))$ heißt eine Vorbewertungs-Struktur, wenn gilt:

(AX1) $(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*)$ ist eine archimedisch schwachgeordnete gemischte Menge.

(AX2) Es existieren $\bar{f},\hat{f} \in \mathcal{F}$ und $\bar{a},\hat{a} \in X$ derart, daß $\bar{f}(S) \subset \{x \mid x \sim \bar{a}\}$, $\hat{f}(S) \subset \{x \mid x \sim \hat{a}\}$ und $\bar{f} \not\sim^* \hat{f}$.

(AX3) $Max(f,g) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ für alle $f,g \in \mathcal{F}$.

(AX4) Zu $f,g \in \mathcal{F}$ mit $g(s) \preceq f(s)$ für alle $s \in S$ existieren $\gamma \in (0,1]$ und $k \in \mathcal{F}$ so, daß
$\phi(\gamma;f(s),\bar{f}(s)) \sim \phi(\gamma;g(s),k(s))$ für alle $s \in S$.

(AX5) Sei u Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\preceq)$ mit $u(\bar{a})=0$,

w Nutzenfunktion auf $(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*)$ mit $w(\bar{f})=0$.

Sei $f_n \in \mathcal{F}_0 := \{f \mid f\in\mathcal{F},\ \bar{a} \preceq f(s) \text{ für alle } s\in S\}$ und

$v_n \in \mathbb{N}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ so, daß $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = 1$ oder

$\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = \infty$ und

$v_n u(f_n(s)) \leq v_{n+1} u(f_{n+1}(s))$ für alle $s\in S$, $n\in\mathbb{N}$.

Ferner existiere ein $f\in\mathcal{F}$ mit

$u(f(s)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n u(f_n(s))$ für alle $s\in S$.

Dann gilt $w(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n w(f_n)$.

Für die Interpretation der Forderungen (AX1) bis (AX5) beschränken wir uns wie in Paragraph 1 auf den Fall, daß die Mischungen Randomisierungen sind.

(4.3) Interpretation:

Für zwei Aktionen f_1 und f_2 und $\alpha\in[0,1]$ ist $g:=\phi^*(\alpha;f_1,f_2)$ interpretierbar als die (randomisierte) Aktion, bei der mit Wahrscheinlichkeit α Aktion f_1 und mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ Aktion f_2 ausgeführt wird. Diese Aktion g führt für jeden Zustand s der Natur mit Wahrscheinlichkeit α zur Konsequenz $f_1(s)$ und mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ zur Konsequenz $f_2(s)$, also zur (randomisierten) Konsequenz $\phi(\alpha;f_1(s),f_2(s))$.

Die Interpretation von (AX1) erhält man aus dem zweiten Teil von (1.7), wenn man dort "Objekt" durch "Aktion" ersetzt.

(AX2) besagt, daß es zwei Aktionen $\bar{f}$ und $\hat{f}$ gibt, die im Sinne der Präferenz unterschieden werden und deren Konsequenzen jeweils für alle Zustände der Natur äquivalent sind zu einer Konsequenz $\bar{a}$ bzw. $\hat{a}$.

(AX3) fordert, daß es zu je zwei Aktionen f ung g eine Aktion h gibt, die für jeden Zustand s der Natur zu einer Konsequenz h(s) führt, die äquivalent ist zur besseren (bevorzugten) der beiden Konsequenzen f(s) und g(s).

(AX4) besagt: Wenn die Konsequenzen von Aktion g für jeden Zustand der Natur nicht erstrebenswerter sind als die Konsequenzen von Aktion f, dann sollen eine Aktion k und ein $\gamma \in (0,1]$ existieren, so daß für jeden Zustand der Natur die Konsequenz der randomisierten Aktion $\phi^*(\gamma; f, \bar{f})$ äquivalent ist zur Konsequenz der randomisierten Aktion $\phi^*(\gamma; g, k)$.

(AX5) besagt: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Aktionen und $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit folgender Eigenschaft: Für jeden Zustand s der Natur und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der v_{n+1}-fache Nutzen von $f_{n+1}(s)$ nicht kleiner als der v_n-fache Nutzen von $f_n(s)$, und der Nutzen von $f_n(s)$ ist nicht kleiner als der Nutzen von $\bar{f}(s)$.
Dann gilt: Wenn es eine Aktion f gibt, so daß man für jeden festen Zustand s der Natur dem Nutzen der Konsequenz f(s) durch den v_n-fachen Nutzen von $f_n(s)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ beliebig nahe kommen kann, dann kann man auch "global" dem Nutzen dieser Aktion f durch den v_n-fachen Nutzen einer Aktion f_n ($n \in \mathbb{N}$) bzw. durch den Nutzen der

v_n-maligen Ausführung einer Aktion f_n ($n \in \mathbb{N}$) beliebig nahe kommen.

Das folgende einfache Beispiel zeigt die Konsistenz (Erfüllbarkeit) der Axiome aus Definition (4.2):

Beispiel: Seien $S \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $(X, \prec) = (\mathbb{R}, <)$, $\mathcal{F} := \{f \mid f: S \to \mathbb{R} \text{ konstant}\}$ und ϕ und ϕ^* die Konvexkombinationen auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{F}$. Ferner sei $\prec^*$ auf $\mathcal{F}$ definiert gemäß

$f \prec^* g$ genau dann, wenn $f(s) < g(s)$ für alle $s \in S$.

Dann ist $(S, (X, \phi, \prec), (\mathcal{F}, \phi^*, \prec^*))$ eine Vorbewertungs-Struktur.

Zusammen mit Beispiel (6.6) liefert dieses Beispiel die Unvollständigkeit dieses Axiomensystems.

Der folgende Satz beantwortet die Frage nach der Unabhängigkeit der Axiome.

(4.4) Satz:

Die Axiome (AX1) bis (AX5) aus Definition (4.2) sind logisch unabhängig.

Beweis: Für jedes Axiom wird ein Beispiel angegeben, das dieses Axiom verletzt, aber die übrigen erfüllt.

1) Sei $S \neq \emptyset$ beliebig, $(X, \prec) := ([0,1], <)$, $\phi: [0,1] \times X^2 \to X$ gemäß $\phi(\alpha; x, y) := \alpha x + (1-\alpha) y$ und $\mathcal{F} := \{\alpha 1 + (1-\alpha)\sigma \mid \alpha \in [0,1]$, $\sigma(s) := 0$, $1(s) := 1$ für alle $s \in S\}$. Sei $\prec^*$ auf $\mathcal{F}$ definiert gemäß $\sigma \prec^* f$ für alle $f \in \mathcal{F}$, $f \neq \sigma$.

zu (AX1): (A1) und (A3) sind erfüllt, aber (A2) ist verletzt.

Denn für $f \neq \sigma$ und $\alpha \in (0,1)$ ist $\sigma \prec^* f$, aber $\phi^*(\alpha;\sigma,f) \sim^* \phi^*(\alpha;f,f)$.

zu (AX2): Setze $\bar{f} := \sigma$, $\hat{f} := 1$.

zu (AX3): klar.

zu (AX4): Sei $f,g \in \mathcal{F}$ mit $g(s) \preccurlyeq f(s)$ für alle $s \in S$, $f = \alpha 1 + (1-\alpha)\sigma$, $g = \beta 1 + (1-\beta)\sigma$. Dann ist $\alpha \geq \beta$ und für $\gamma = \frac{1}{2}$ und $k = (\alpha-\beta)1 + (1-\alpha+\beta)\sigma$ gilt $k \in \mathcal{F}$ sowie

$$\phi\left(\tfrac{1}{2}; f(s), \sigma(s)\right) = \frac{\alpha}{2}\, 1(s) + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sigma(s)$$

$$= \frac{\beta}{2}\, 1(s) + \frac{1}{2}(1-\beta)\, \sigma(s) + \frac{\alpha-\beta}{2}\, 1(s) + \frac{1}{2}(1-\alpha+\beta)\, \sigma(s)$$

$$= \phi\left(\tfrac{1}{2}; g(s), k(s)\right) \quad \text{für alle } s \in S.$$

zu (AX5): Es gibt keine Nutzenfunktion w auf $(\mathcal{F}, \phi^*, \prec^*)$, weil wegen $\sigma \prec^* 1$ $w(\sigma) =: a < b := w(1)$ und daher für $0 < \alpha < \beta < 1$ $w(\alpha 1 + (1-\alpha)\sigma) = \alpha b + (1-\alpha)a < \beta b + (1-\beta)a = w(\beta 1 + (1-\beta)\sigma)$ wäre. Daraus folgte $\alpha 1 + (1-\alpha)\sigma \prec^* \beta 1 + (1-\beta)\sigma$ im Widerspruch zur Definition von $\prec^*$. Daher ist (AX5) erfüllt.

2) Sei $S \neq \emptyset$ beliebig, $(X,\prec) := (\mathbb{R},<)$ und $\phi: [0,1] \times X^2 \to X$ gemäß $\phi(\alpha;x,y) := \alpha x + (1-\alpha)y$. Ferner sei $\mathcal{F} = \{\sigma\}$.
Dann ist (AX2) verletzt und die Axiome (AX1), (AX3), (AX4) und (AX5) gelten.

3) Sei $S := [0,1]$, $(X,\prec) := (\mathbb{R},<)$ und $\phi: [0,1] \times X^2 \to X$ gemäß $\phi(\alpha;x,y) = \alpha x + (1-\alpha)y$. Ferner sei $\mathcal{F} := \{f \mid f: S \to X,\ f(s) = as + b \text{ für alle } s \in S,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ und $\prec^*$ auf $\mathcal{F}$ sei definiert gemäß

$$g \prec^* f \quad \text{genau dann, wenn} \quad \int_0^1 g(s)\,ds < \int_0^1 f(s)\,ds.$$

zu (AX1): Sei $f,g,h \in \mathcal{F}$ mit $f \prec^* g \prec^* h$ und seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ die zugehörigen Integralwerte. Dann gilt $a < b < c$ und wegen der Gültigkeit des Archimedischen Axioms in $(\mathbb{R},<)$ existieren $\alpha,\beta \in (0,1)$

so, daß $\alpha a+(1-\alpha)c<b$ und $\beta a+(1-\beta)c>b$. Wegen der Linearität des Integrals folgt daraus (A3). Damit ist die Gültigkeit von (AX1) klar.

zu (AX2): Setze $\bar{f}:=\sigma$, $\hat{f}:=1$.

zu (AX3): (AX3) ist verletzt, denn für $f(s):=s$ und $g(s):=2s-\frac{1}{2}$ für alle $s\in S$ gilt $\max(f,g)(s)=\begin{cases} s & , s\leq\frac{1}{2} \\ 2s-\frac{1}{2} & , s>\frac{1}{2} \end{cases}$, also $\max(f,g)\notin\mathcal{F}$.

zu (AX4): Sei $f,g\in\mathcal{F}$ mit $g(s)\not\sim f(s)$ für alle $s\in S$, $f(s)=as+b$, $g(s)=cs+d$. Setze $\gamma:=\frac{1}{2}$ und $k(s):=(a-c)s+(b-d)$ für alle $s\in S$. Dann ist $k\in\mathcal{F}$ und es gilt

$$\phi\left(\tfrac{1}{2};f(s),\bar{f}(s)\right)=\tfrac{1}{2}(as+b)=\tfrac{1}{2}(cs+d)+\tfrac{1}{2}((a-c)s+(b-d))=$$

$$=\phi\left(\tfrac{1}{2};g(s),k(s)\right) \quad \text{für alle } s\in S.$$

zu (AX5): Für eine Nutzenfunktion u auf $(X,\phi,\preceq)$ mit $u(0)=0$ gilt $u(x)=rx$ mit $r>0$; entsprechend gilt für eine Nutzenfunktion w auf $(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*)$ mit $w(\sigma)=0$, daß $w(f)=t\int_0^1 f(s)ds$ mit $t>0$.

Für f_n,v_n und f gemäß den Voraussetzungen von (AX5) gilt daher

$$rv_nf_n(s)\leq rv_{n+1}f_{n+1}(s) \quad \text{für alle } s\in S \quad \text{sowie}$$

$$rf(s)=\sup_{n\in\mathbb{N}} rv_nf_n(s) \quad \text{für alle } s\in S.$$

Die Funktionen $g_n(s):=rv_nf_n(s)$ $(n\in\mathbb{N})$ sind stetige Abbildungen von $[0,1]$ in $\mathbb{R}_0^+$ und daher $\mathfrak{B}\cap[0,1]$-meßbar. Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue (vgl. [25], S. 180) folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} v_nw(f_n)=t\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n\int_0^1 f_n(s)ds=\frac{t}{r}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_0^1 rv_nf_n(s)ds=$$

$$=\frac{t}{r}\int_0^1 rf(s)ds=t\int_0^1 f(s)ds=w(f).$$

4) Sei $S:=[0,1]$, $(X,\prec):=([0,1],<)$ und $\phi:[0,1]\times X^2\to X$ gemäß $\phi(\alpha;x,y):=\alpha x+(1-\alpha)y$. Ferner sei $\mathcal{F}:=\{f\,|\,f:S\to X$ stetig, monoton wachsend$\}$ und $\prec^*$ auf $\mathcal{F}$ sei definiert gemäß

$$g \prec^* f \quad \text{genau dann, wenn} \quad \int_0^1 g(s)ds < \int_0^1 f(s)ds.$$

zu (AX1): Sei $f_i\in\mathcal{F}$ $(i=1,2)$. Aus $f_i(s) \geq f_i(t)$ für alle $s\geq t$ folgt $\alpha f_1(s)+(1-\alpha)f_2(s) \geq \alpha f_1(t)+(1-\alpha)f_2(t)$ für alle $s\geq t$ und alle $\alpha\in[0,1]$. Ferner ist $\alpha f_1+(1-\alpha)f_2$ stetig. Damit ist gezeigt, daß ϕ^* Abbildung von $[0,1]\times\mathcal{F}^2$ in $\mathcal{F}$ ist.

(A1), (A2) und (A3) folgen unmittelbar aus der Positivität und Linearität des Integrals.

zu (AX2): Setze $\bar{f}:=0$, $\hat{f}:=1$.

zu (AX3): klar.

zu (AX4): Sei $f(s):=\frac{1}{4}s+\frac{1}{2}$, $g(s):=\frac{1}{2}s$ für alle $s\in S$.

Dann gilt $f,g\in\mathcal{F}$ und $g(s)\leq f(s)$ für alle $s\in S$.

Für $\gamma\in(0,1)$ und $k:[0,1]\to[0,1]$ mit $\gamma f(s)=\gamma g(s)+(1-\gamma)k(s)$ gilt $k(s)=\frac{\gamma(f(s)-g(s))}{1-\gamma}$. Daraus folgt $k(0)=\frac{\gamma}{2(1-\gamma)} > \frac{\gamma}{4(1-\gamma)}=k(1)$, also $k\notin\mathcal{F}$.

Für $\gamma=1$ und $k\in\mathcal{F}$ ist $f(1)=\frac{3}{4}\neq\frac{1}{2}=g(1)+0\cdot k(1)$.

Damit ist gezeigt, daß (AX4) verletzt ist.

zu (AX5): Folgt mit Hilfe des Satzes von Lebesgue (vgl. [25], S. 180).

5) Sei $S:=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $\mathcal{Y}:=\{(a,b]\,|\,a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}\}$, $\mu:\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$ gemäß

$$\mu((a,b]):=\begin{cases}1 & a\leq 0<b\\ 0 & \text{sonst}\end{cases},\quad (X,\prec):=(\mathbb{R},<) \text{ und } \phi:[0,1]\times X^2\to X \text{ gemäß}$$

$\phi(\alpha;x,y):=\alpha x+(1-\alpha)y$. Mit $1_A(s):=\begin{cases}1, & s\in A\\ 0, & s\notin A\end{cases}$ für $A\subset S$ sei

$\mathcal{F} := \{f: S \to \mathbb{R} \mid f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i},\ a_i \in \mathbb{R},\ A_i \in \mathcal{S},\ \sum_{i=1}^{n} A_i = S,\ n \in \mathbb{N}\}$ und

$\preceq^*$ sei auf $\mathcal{F}$ definiert gemäß

$$\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \preceq^* \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j} \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \leq \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j).$$

(AX1) und (AX3) sind unmittelbar klar.

zu (AX2): Setze $\bar{f} := 0 \cdot 1_{(-\infty,\infty]}$, $\hat{f} := 1 \cdot 1_{(-\infty,\infty]}$.

zu (AX4): Seien $f,g \in \mathcal{F}$ mit $g(s) \preceq f(s)$ für alle $s \in S$,

$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j}$. Für $\gamma := \frac{1}{2}$ und $k := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i - b_j) 1_{A_i B_j}$

gilt $k \in \mathcal{F}$ wegen der Durchschnittsstabilität von $\mathcal{S}$, sowie

$$\phi\left(\tfrac{1}{2}; f(s), \sigma(s)\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} a_i 1_{A_i B_j}(s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\tfrac{1}{2} b_j + \tfrac{1}{2}(a_i - b_j)\right) 1_{A_i B_j}(s)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j}(s) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i - b_j) 1_{A_i B_j}(s)$$

$$= \phi\left(\tfrac{1}{2}; g(s), k(s)\right) \quad \text{für alle } s \in S.$$

zu (AX5): Für $n \in \mathbb{N}$ sei $v_n := 1$, $f_n := 1_{\left(\frac{1}{n},1\right]}$. Dann sind mit

$f := 1_{(0,1]}$ die Voraussetzungen von (AX5) erfüllt und es gilt

für eine Nutzenfunktion w auf $(\mathcal{F}, \phi^*, \preceq^*)$ mit $w(\bar{f}) = 0$

$$w(f) = k \cdot 1 \neq 0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n w(f_n) \qquad (k \in \mathbb{R}^+,\ k = w(\hat{f})).$$

Daher ist (AX5) verletzt.

Damit ist Satz (4.4) bewiesen.

Eine Vorbewertungs-Struktur erfüllt zwei Axiome, die in der Utility-Theorie bereits verwendet wurden:

(4.5) Satz:

Sei $(S,(X,\phi,\prec),(\mathcal{F},\phi^*,\prec^*))$ eine Vorbewertungs-Struktur.

Dann gilt:

(1) Wenn $f,g\in\mathcal{F}$ mit $g(s)\preccurlyeq f(s)$ für alle $s\in S$, dann $g\preccurlyeq^* f$.

(2) Es existieren $x_0,x_1\in X$ mit $x_0\prec x_1$.

Beweis: zu (1): Sei $f,g\in\mathcal{F}$ mit $g(s)\preccurlyeq f(s)$ für alle $s\in S$.

Fall 1: $g\in\mathcal{F}_0 := \{h\,|\,h\in\mathcal{F},\ \bar{a}\preccurlyeq h(s)$ für alle $s\in S\}$, $\bar{a}$ gemäß (AX2).

Dann ist auch $f\in\mathcal{F}_0$ wegen der Transitivität von $\preccurlyeq$ (vgl. Satz (1.2)). Setze $f_1:=g$, $f_n:=f$ für $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, und $v_n:=1$ für $n\in\mathbb{N}$.

Dann ist für eine Nutzenfunktion u auf $(X,\phi,\prec)$

$v_n u(f_n(s)) \leq v_{n+1}u(f_{n+1}(s))$ für alle $s\in S$, $n\in\mathbb{N}$ sowie

$u(f(s)) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n u(f_n(s))$ für alle $s\in S$.

Wegen (AX1) und Satz (3.3) existiert eine Nutzenfunktion w auf $(\mathcal{F},\phi^*,\prec^*)$ mit $w(\bar{f})=0$ und wegen (AX5) gilt

$w(f) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n w(f_n) \geq w(g)$, also $g\preccurlyeq^* f$.

Speziell gilt für $g=\bar{f}$: $\bar{f}\preccurlyeq^* f$ für alle $f\in\mathcal{F}_0$.

Fall 2: $g\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{F}_0$.

Wegen (AX4) existieren $\gamma\in(0,1]$ und $k\in\mathcal{F}$ so, daß

$\phi(\gamma;f(s),\bar{f}(s)) \sim \phi(\gamma;g(s),k(s))$ für alle $s\in S$.

Fall 2.1: $\gamma=1$. Dann gilt $u(g(s))=u(f(s))$ für alle $s\in S$.

Wegen (AX3) existiert ein $h\in\mathcal{F}$ derart, daß $h\in\mathrm{Max}(g,\bar{f})$.

Es gilt $h\in\mathcal{F}_0$, daher folgt aus Fall 1 $w(h)\geq w(\bar{f})$.

Weiter gilt $g(s)\preccurlyeq h(s)$ für alle $s\in S$ und wegen $g\notin\mathcal{F}_0$ existiert ein $s\in S$ mit $g(s)\prec h(s)$. Wegen (AX4) existieren $\gamma'\in(0,1)$ und $1\in\mathcal{F}$ derart, daß

$\phi(\gamma';h(s),\bar{f}(s)) \sim \phi(\gamma';g(s),1(s)) \sim \phi(\gamma';f(s),1(s))$ für alle $s\in S$.

Wegen $\phi^*(\gamma';h,\bar{f})\in\mathcal{F}_o$ folgt daraus $\phi^*(\gamma';g,1)\in\mathcal{F}_o$ und $\phi^*(\gamma';f,1)\in\mathcal{F}_o$. Setze $v_n:=1$ $(n\in\mathbb{N})$, $f_1:=\phi^*(\gamma';g,1)$, $f_n:=\phi^*(\gamma';f,1)$ für $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Dann folgt mit (AX5) $w(\phi^*(\gamma';f,1)) \geq w(\phi^*(\gamma';g,1))$.

Analog zeigt man $w(\phi^*(\gamma';f,1)) \leq w(\phi^*(\gamma';g,1))$.

Insgesamt gilt also $w(f)=w(g)$ und damit $g \sim^* f$.

Fall 2.2: $\gamma\in(0,1)$. Dann ist $u(\phi(\gamma;g(s),\bar{f}(s))\leq u(\phi(\gamma;f(s),\bar{f}(s))= u(\phi(\gamma;g(s),k(s))$ und wegen $\gamma\neq 1$ $\bar{f}(s) \prec k(s)$ für alle $s\in S$.

Wegen Fall 1 folgt $w(k)\geq w(f)$.

Fall 2.1 liefert $w(\phi^*(\gamma;f,\bar{f}))=w(\phi^*(\gamma;g,k))$ und wegen $w(k)\geq w(\bar{f})$ folgt mit der Linearität von w $w(g)\leq w(f)$, also $g \preceq^* f$.

zu (2): Wegen (AX2) gilt $\bar{f} \preceq^* \hat{f}$ oder $\hat{f} \preceq^* \bar{f}$. Mit (1) folgt daraus $\bar{f}(s_o) \prec \hat{f}(s_o)$ für ein $s_o\in X$ oder $\hat{f}(s_1) \prec \bar{f}(s_1)$ für ein $s_1\in X$. Für $\bar{a},\hat{a}\in X$ gemäß (AX2) gilt also entweder $\bar{a} \prec \hat{a}$ oder $\hat{a} \prec \bar{a}$.

Bemerkungen:

1) Forderung (1) besagt: Wenn für jeden Zustand s der Natur die Konsequenz g(s) von Aktion g nicht erstrebenswerter ist als die Konsequenz f(s) von Aktion f, dann soll Aktion g nicht der Aktion f vorgezogen werden.

Diese Forderung wird von Ferreira [5] verwendet. Bei Anscombe und Aumann [1], Ferguson [4], und Fishburn [8] wird nur gefordert, daß gilt

(1') Wenn $g(s_o) \prec f(s_o)$ und $g(s)=f(s)$ für alle $s\in S\setminus\{s_o\}$, dann $g \prec^* f$.

Aus (1') folgt zusammen mit der Endlichkeit von S und der Transitivität von $\prec^*$ die Gültigkeit von (1).

2) Forderung (2) bedeutet, daß die Relation $\prec$ auf X nicht leer, also nicht trivial ist. (2) wird von Anscombe und Aumann [1] und Fishburn [11] gefordert und ist bei Fishburn [8] erfüllt. Ferguson [4] fordert (2) zum Beweis der Eindeutigkeit der subjektiven Vorbewertung.

4.2 Existenz und Eindeutigkeit der subjektiven Vorbewertung

Zunächst werden der im folgenden als wesentliches Hilfsmittel verwendete Satz von Daniell-Stone und die für diesen Satz grundlegenden Definitionen des Stoneschen Vektorverbandes, des abstrakten Integrals und der $\mathcal{F}$-offenen Menge zusammengestellt (vgl. [3], §39).

(4.6) Definition:

Eine Menge $\mathcal{F}$ von reellwertigen Funktionen auf einer Menge S heißt Stonescher Vektorverband (reeller Funktionen auf S), wenn gilt:

(1) $\mathcal{F}$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$,

(2) Wenn $f \in \mathcal{F}$, dann $|f| \in \mathcal{F}$, wobei $|f|(s) := |f(s)|$ für alle $s \in S$,

(3) $\min(f,1) \in \mathcal{F}$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}^+$ bezeichne die Menge der nichtnegativen reellen Funktionen aus $\mathcal{F}$.

(4.7) Definition:

Eine reellwertige Funktion I auf einem Stoneschen Vektorverband $\mathcal{F}$ heißt abstraktes Integral, wenn gilt:

(1) I ist linear,

(2) I ist positiv, d.h. $I(f) \geq 0$ für alle $f \in \mathcal{F}^+$,

(3) Für jede monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}^+$

mit $f := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{F}$ gilt $I(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} I(f_n)$

(Daniell-Stetigkeit).

(4.8) Definition:

Sei $\mathcal{F}$ ein Stonescher Vektorverband reeller Funktionen auf einer Menge S. Eine Menge $G \subset S$ heißt $\mathcal{F}$-offen, wenn eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}^+$ existiert mit $1_G = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

$\mathcal{G} := \mathcal{G}(\mathcal{F})$ bezeichne das System aller $\mathcal{F}$-offenen Mengen und ${}^B\mathcal{G}(\mathcal{F})$ die von $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ erzeugte σ-Algebra.
Für einen Maßraum $(S,\mathfrak{S},\pi)$ bezeichne $\mathcal{L}^1(\pi)$ die Menge aller reellen, einfach π-integrierbaren Funktionen über S.
Dann gilt:

(4.9) Satz (P.Daniell - M.H.Stone):

Sei S eine Menge, $\mathcal{F}$ ein Stonescher Vektorverband reeller Funktionen auf S, und I ein abstraktes Integral auf $\mathcal{F}$. Dann existiert genau ein Maß π auf der σ-Algebra ${}^B\mathcal{G}(\mathcal{F})$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^1(\pi)$

(2) $I(f) = \int_S f \, d\pi$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

Beweis: [3], Satz 39.4.

Nach diesen Vorbereitungen formulieren wir den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die subjektive Vorbewertung.

(4.10) Satz:

Es sei $(S,(X,\phi,\preceq),(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*))$ eine Vorbewertungs-Struktur und u eine Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\preceq)$ mit $u(\bar{a})=0$. Ferner sei $(u\circ\mathcal{F})^*:=\{au\circ f-bu\circ g \mid a,b\in\mathbb{R}_0^+,\ f,g\in\mathcal{F}\}$. Dann gibt es eine Nutzenfunktion w auf $(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*)$ mit $w(\bar{f})=0$ und $w(\hat{f})=u(\hat{a})$ und ein eindeutig bestimmtes Maß π auf der σ-Algebra ${}^{B}\mathcal{U}_{\sigma}((u\circ\mathcal{F})^*)$ über S mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $(u\circ\mathcal{F})^* \subset \mathcal{L}^1(\pi)$

(2) $w(f)=\int_S u\circ f(s)\,d\pi(s)$ für alle $f\in\mathcal{F}$

(3) $\pi(S)=1$

(4) $g \preceq^* f$ genau dann, wenn

$$\int_S u\circ g(s)\,d\pi(s) \le \int_S u\circ f(s)\,d\pi(s).$$

Bemerkung:

Sei u Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\preceq)$ mit $u(\bar{a})=0$ und w Nutzenfunktion auf $(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*)$ mit $w(\bar{f})=0$. In der Definition der Vorbewertungs-Struktur werden nur noch solche Nutzenfunktionen u' auf $(X,\phi,\preceq)$ und w' auf $(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*)$ zugelassen, für die gilt $u'=qu$ bzw. $w'=rw$ mit $q,r\in\mathbb{R}^+$. In Satz (4.10) ist w nach Wahl der Nutzenfunktion u auf $(X,\phi,\preceq)$ eindeutig festgelegt durch $w(\bar{f})=0$ und $w(\hat{f})=u(\hat{a})$.

Für den Beweis des Satzes werden die beiden folgenden Lemmata verwendet.

In Lemma (4.11) betrachten wir den speziellen Fall einer Vorbewertungs-Struktur, für die X eine konvexe Teilmenge der reellen Zahlen und $\mathcal{F}$ eine konvexe Menge von Abbildungen von S in X ist.

(4.11) Lemma:

Es sei $(X,<)$ eine konvexe Teilmenge der reellen Zahlen mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Ordnung $<$ und $\psi:[0,1]\times X^2\to X$ gemäß $\psi(\alpha;x,y)=\alpha x+(1-\alpha)y$. Ferner sei $\mathcal{F}$ eine Menge von Abbildungen von S in X, die gegenüber der Mischungsoperation $\psi':[0,1]\times\mathcal{F}^2\to X^S$ gemäß $\psi'(\alpha;f,g)=\alpha f+(1-\alpha)g$ abgeschlossen ist, $\preccurlyeq'$ sei eine binäre Relation auf $\mathcal{F}$ und es gelte:

(AX1') $(\mathcal{F},\psi',\preccurlyeq')$ ist eine archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge.

(AX2') (i) $\sigma\in\mathcal{F}$, wobei $\sigma(s):\equiv 0$ für alle $s\in S$.

(ii) Es existiert $\hat{f}\in\mathcal{F}$ mit $\hat{f}(s)\equiv c$ für alle $s\in S$, $\hat{f}\not\sim'\sigma$.

(AX3') Wenn $f,g\in\mathcal{F}$, dann $\max(f,g)\in\mathcal{F}$.

(AX4') Wenn $f,g\in\mathcal{F}$ mit $g(s)\leq f(s)$ für alle $s\in S$, dann existieren $\gamma\in(0,1]$ und $k\in\mathcal{F}$ derart, daß

$\gamma f(s)=\gamma g(s)+(1-\gamma)k(s)$ für alle $s\in S$.

(AX5') Sei t Nutzenfunktion auf $(\mathcal{F},\psi',\preccurlyeq')$ gemäß Satz (1.6) mit $t(\sigma)=0$. Wenn $f,f_n\in\mathcal{F}^+$ und $v_n\in\mathbb{N}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ so, daß $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n=1$ oder $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n=\infty$,

$v_n f_n(s)\leq v_{n+1}f_{n+1}(s)$ für alle $s\in S, n\in\mathbb{N}$ und

$f=\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n f_n$, dann gilt $t(f)=\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n t(f_n)$.

Dann gilt:

a) $\mathcal{F}^* := \{af-bg \mid f,g \in \mathcal{F},\ a,b \in \mathbb{R}_o^+\}$ ist ein Stonescher Vektorverband reeller Funktionen auf S, der $\mathcal{F}$ umfaßt.

b) Die durch $t^*(af-bg) := at(f)-bt(g)$ wohldefinierte Abbildung t^* von $\mathcal{F}^*$ in $\mathbb{R}$ ist ein abstraktes Integral auf $\mathcal{F}^*$ und Fortsetzung von t.

Beweis: zu a): $\mathcal{F}^*$ ist eine Teilmenge des Vektorraumes aller reellwertigen Funktionen auf S. Wir zeigen, daß für $\mathcal{F}^*$ die Axiome (1), (2) und (3) aus Definition (4.6) gelten.

zu (1): Es genügt zu zeigen, daß $\mathcal{F}^*$ gegenüber den linearen Operationen abgeschlossen ist.

Sei $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ und $a_1f_1-b_1g_1, a_2f_2-b_2g_2 \in \mathcal{F}^*$.

Falls mindestens zwei der Koeffizienten a_1,a_2,b_1,b_2 Null sind oder falls $\lambda=0$ oder $\mu=0$ ist trivialerweise

$\lambda(a_1f_1-b_1g_1)+\mu(a_2f_2-b_2g_2) \in \mathcal{F}^*$.

Seien also mindestens drei der Koeffizienten a_1,a_2,b_1 und b_2 größer als Null und λ und μ von Null verschieden.

Sei $\lambda>0$, $\mu>0$. Setze $\lambda' := \lambda a_1+\mu a_2$, $\mu' := \lambda b_1+\mu b_2$,

$$f' := \frac{\lambda a_1}{\lambda a_1+\mu a_2} f_1 + \frac{\mu a_2}{\lambda a_1+\mu a_2} f_2,\quad g' := \frac{\lambda b_1}{\lambda b_1+\mu b_2} g_1 + \frac{\mu b_2}{\lambda b_1+\mu b_2} g_2.$$

Dann ist $\lambda'>0$, $\mu'>0$ und wegen (AX1') $f',g' \in \mathcal{F}$.

Damit gilt

$$\lambda(a_1f_1-b_1g_1)+\mu(a_2f_2-b_2g_2) = \lambda a_1f_1-\lambda b_1g_1+\mu a_2f_2-\mu b_2g_2 =$$

$$= \lambda' f' - \mu' g' \in \mathcal{F}^*.$$

Falls $\lambda<0$ setze $\hat{\lambda} := -\lambda$.

Dann ist $\lambda(a_1f_1-b_1g_1) = \hat{\lambda}(b_1g_1-a_1f_1)$ mit $b_1g_1-a_1f_1 \in \mathcal{F}^*$ und $\hat{\lambda}>0$.

Analog verfahre man, falls $\mu<0$. Dadurch sind die übrigen Fälle auf den Fall $\lambda>0$, $\mu>0$ zurückgeführt.

Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{F}^*$ gegenüber den linearen Operationen abgeschlossen und damit als Teilmenge eines Vektorraumes selbst Vektorraum ist.

zu (2): Falls $h=\mathcal{O}$ ist $|h|= h = \mathcal{O} \in \mathcal{F}^*$.

Sei also $h\neq\mathcal{O}$, $h\in\mathcal{F}^*$.

Dann ist $h=af-bg$ mit $f,g\in\mathcal{F}$, $a,b\in\mathbb{R}_o^+$, $(a,b)\neq(0,0)$.

Setze $a' := \frac{a}{\max(a,b)}$, $b' := \frac{b}{\max(a,b)}$. Wegen (AX1') und (AX2') (i) ist dann $a'f = a'f+(1-a')\mathcal{O}\in\mathcal{F}$ und $b'g = b'g+(1-b')\mathcal{O}\in\mathcal{F}$ und wegen (AX3') ist $\max(a'f,b'g)\in\mathcal{F}$.

Zusammen mit

$$\max(h,\mathcal{O}) = \max(af,bg)-bg = \max(a,b)\cdot\max(a'f,b'g)-bg$$

folgt daraus, daß $\max(h,\mathcal{O})\in\mathcal{F}^*$.

Analog zeigt man, daß

$$\max(-h,\mathcal{O}) = \max(af,bg)-af = \max(a,b)\cdot\max(a'f,b'g)-af\in\mathcal{F}^*.$$

Nach (1) ist $\mathcal{F}^*$ Vektorraum, also $\max(h,\mathcal{O})+\max(-h,\mathcal{O})\in\mathcal{F}^*$ und wegen $|h|= \max(h,\mathcal{O})+\max(-h,\mathcal{O})$ auch $|h|\in\mathcal{F}^*$.

zu (3): Sei $\hat{f}$ gemäß (AX2')(ii). Dann ist $c\neq0$, da andernfalls $\hat{f}(s)\equiv\mathcal{O}(s)$ wäre für alle $s\in S$ und daher $t(\hat{f})=t(\mathcal{O})$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Daher ist $1 = \frac{1}{c}\hat{f}\in\mathcal{F}^*$ und für $f\in\mathcal{F}^*$ gilt wegen (1)

$f-1\in\mathcal{F}^*$, also wegen (2) auch

$|f-1|\in\mathcal{F}^*$. Da $\mathcal{F}^*$ Vektorraum ist, ist dann auch

$$\min(f,1) = \tfrac{1}{2}\left(f+1-|f-1|\right)\in\mathcal{F}^* \text{ für alle } f\in\mathcal{F}^*.$$

Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{F}^*$ ein Stonescher Vektorverband ist.

Wegen $1f - 1\mathcal{O} = f$ für alle $f\in\mathcal{F}$ ist außerdem $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}^*$.

zu b): I. Wir zeigen zunächst, daß t* wohldefiniert ist.

α) Sei $f,g \in \mathfrak{F}$, $a,b \in \mathbb{R}_o^+$ so, daß $af-bg=\mathcal{O}$.

Falls $a>0$ und $a \geq b$ ist $f = \frac{b}{a}\, g + \left(1-\frac{b}{a}\right)\mathcal{O}$, also

$$t(f) = t\left(\frac{b}{a}\, g + \left(1-\frac{b}{a}\right)\mathcal{O}\right) = \frac{b}{a}\, t(g).$$

Daraus folgt $t^*(af-bg) = at(f)-bt(g) = 0 = t(\mathcal{O})$.

Falls $b=a=0$ ist trivialerweise $t^*(0f-0g) = 0 = t(\mathcal{O})$.

Falls $b>a\geq 0$ ist $\frac{a}{b}\, f+\left(1-\frac{a}{b}\right)\mathcal{O} = g$ und damit wieder $t^*(af-bg) = 0$.

β) Sei $a_1f_1-b_1g_1$, $a_2f_2-b_2g_2 \in \mathfrak{F}^*$ und $a_1f_1-b_1g_1 = a_2f_2-b_2g_2$.

Fall 1: $a_1+b_2 > 0$, $b_1+a_2 > 0$.

Setze $h_1 := \frac{a_1}{a_1+b_2}\, f_1 + \frac{b_2}{a_1+b_2}\, g_2$, $\quad h_2 := \frac{b_1}{b_1+a_2}\, g_1 + \frac{a_2}{b_1+a_2}\, f_2$.

Dann ist $h_1, h_2 \in \mathfrak{F}$ und $a_1f_1+b_2g_2-b_1g_1-a_2f_2 = (a_1+b_2)h_1-(b_1+a_2)h_2 = \mathcal{O}$.

Zusammen mit α) folgt daraus

$$t^*(a_1f_1-b_1g_1)- t^*(a_2f_2-b_2g_2) = (a_1+b_2)t(h_1)-(b_1+a_2)t(h_2) =$$

$$= t^*((a_1+b_2)h_1-(b_1+a_2)h_2) = 0,$$

also $t^*(a_1f_1-b_1g_1) = t^*(a_2f_2-b_2g_2)$.

Fall 2: $b_1+a_2 = 0$, $a_1+b_2 = 0$.

Dann sind alle Koeffizienten gleich Null; daher gilt trivialerweise $t^*(a_1f_1-b_1g_1) = t^*(a_2f_2-b_2g_2)$.

Fall 3: $b_1+a_2 = 0$, $a_1+b_2 > 0$.

Sei h_1 definiert wie in Fall 1. Dann gilt $(a_1+b_2)h_1 = \mathcal{O}$ und wegen α) folgt daraus

$$t^*(a_1f_1-0g_1)- t^*(0f_2-b_2g_2) = a_1t(f_1)+ b_2t(g_2) =$$

$$= (a_1+b_2)t(h_1) = t^*(\mathcal{O}) = 0.$$

Fall 4: $a_1+b_2=0$, $b_1+a_2>0$.

Durch Vertauschung von $a_1f_1-b_1g_1$ und $a_2f_2-b_2g_2$ folgt die Wohldefiniertheit aus Fall 3.

Damit ist die Wohldefiniertheit von t* bewiesen.

Wegen $t^*(f)= t^*(1f-1\sigma)= t(f)$ für alle $f\in\mathcal{F}$ ist t* Fortsetzung von t.

II. Wir zeigen nun, daß t* (1) linear, (2) positiv und (3) Daniell-stetig ist.

Nach Teil a) ist $0f=a\sigma$ für alle $f\in\mathcal{F}$, $a\in\mathbb{R}^+$.

Wegen der Wohldefiniertheit von t* können wir daher im folgenden o.B.d.A. voraussetzen, daß alle $h\in\mathcal{F}^*$ in der Gestalt af-bg mit $f,g\in\mathcal{F}$ und $a,b\in\mathbb{R}^+$, also mit $a\neq 0$ und $b\neq 0$ gegeben sind.

zu (1): Sei $a_1f_1-b_1g_1, a_2f_2-b_2g_2\in\mathcal{F}^*$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Falls $\lambda=0$ oder $\mu=0$ folgt aus der Wohldefiniertheit von t*

$$\lambda t^*(a_1f_1-b_1g_1)+\mu t^*(a_2f_2-b_2g_2)= t^*(\lambda(a_1f_1-b_1g_1)+\mu(a_2f_2-b_2g_2)).$$

Sei nun also $\lambda>0$, $\mu>0$.

Dann gilt mit λ', μ', f' und g' wie im Beweis zu a), Teil (1)

$$\begin{aligned}\lambda t^*(a_1f_1-b_1g_1)+\mu t^*(a_2f_2-b_2g_2) &= \\ &= \lambda a_1t(f_1)+\mu a_2t(f_2)-\lambda b_1t(g_1)-\mu b_2t(g_2)\\ &= t^*(\lambda'f'-\mu'g')\\ &= t^*(\lambda(a_1f_1-b_1g_1)+\mu(a_2f_2-b_2g_2)).\end{aligned}$$

zu (2): Sei $h\in\mathcal{F}^*$ mit $h(s)\geq 0$ für alle $s\in S$.

Sei $f,g\in\mathcal{F}$, $a,b\in\mathbb{R}^+$ so, daß $h=af-bg$.

Dann ist $\frac{1}{\max(a,b)}\,h(s)\geq 0$ für alle $s\in S$ und damit

$$\frac{b}{\max(a,b)}\,g(s)\leq\frac{a}{\max(a,b)}\,f(s) \quad \text{für alle } s\in S.$$

Da $(S,(X,\psi,\prec),(\mathcal{F},\psi',\prec'))$ eine Vorbewertungs-Struktur ist, folgt daraus mit Satz (4.5)(1) und und (AX2')(i)

$t\left(\frac{b}{\max(a,b)}\, g\right) \leq t\left(\frac{a}{\max(a,b)}\, f\right)$. Damit folgt

$t^*(h) = \max(a,b)\left(t\left(\frac{a}{\max(a,b)}\, f\right) - t\left(\frac{b}{\max(a,b)}\, g\right)\right) \geq 0.$

<u>zu (3):</u> Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $(\mathcal{F}^*)^+$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} h_n =: h \in \mathcal{F}^*$. Sei für $n\in\mathbb{N}$ $f_n, g_n \in \mathcal{F}$ und $a_n, b_n \in \mathbb{R}^+$ so, daß $h_n = a_n f_n - b_n g_n$, und sei $f,g\in\mathcal{F}$ und $a,b\in\mathbb{R}^+$ so, daß $h = af - bg$. Dann ist

$h_n(s) = \max(a_n,b_n)\left(\frac{a_n}{\max(a_n,b_n)} f_n(s) - \frac{b_n}{\max(a_n,b_n)} g_n(s)\right) \geq 0$ für alle $s\in S$. Wegen (AX4') existieren $c_n\in(0,1]$ und $k_n\in\mathcal{F}$ so, daß

$$\frac{a_n c_n}{\max(a_n,b_n)} f_n(s) = (1-c_n)k_n(s) + \frac{b_n c_n}{\max(a_n,b_n)} g_n(s) \text{ für alle } s\in S.$$

Damit folgt $h_n(s) = \max(a_n,b_n)\,\frac{(1-c_n)}{c_n}\, k_n(s)$ für alle $s\in S$.

Setze $d_n := \max(a_n,b_n)\,\frac{(1-c_n)}{c_n}$, dann ist

$h_n(s) = d_n k_n(s)$ für alle $s\in S$ mit $d_n\in\mathbb{R}_o^+$, $k_n\in\mathcal{F}$.

Analog zeigt man, daß $h = dk$ mit $d\in\mathbb{R}_o^+$, $k\in\mathcal{F}$.

Falls $d = 0$ ist $0 \leq h_n(s) \leq h(s) = 0$ für alle $s\in S$, also $h_n = h = \mathcal{O}$.

Daraus folgt trivialerweise $t^*(h) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} t^*(h_n)$.

Sei also $d > 0$.

Setze $v_n := \left[d_n d^{-1} + 1\right]$, $k_n' := \frac{d_n}{dv_n}\, k_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Dabei bezeichne $\left[d_n d^{-1} + 1\right]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $d_n d^{-1} + 1$.

Dann ist $d_n d^{-1} k_n = v_n k'_n$ mit $v_n \in \mathbb{N}$, $k'_n \in \mathcal{F}$.

Fall 1: $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = \infty$.

Dann folgt aus (AX5')

$$t^*(h) = dt(k) = d \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n t(k'_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} t^*(dv_n k'_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} t^*(h_n).$$

Fall 2: $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = 1$.

Dann ist $v_n = 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und mit (AX5') folgt

$$t^*(h) = dt(k) = d \sup_{n\in\mathbb{N}} t(k'_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} t^*(dv_n k'_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} t^*(h_n).$$

Fall 3: $1 < q := \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n < \infty$.

Dann gilt für $n\in\mathbb{N}$ $v_n q^{-1} \leq 1$. Daher ist $v_n q^{-1} k'_n \in \mathcal{F}$ und es gilt

$q^{-1}k = \sup_{n\in\mathbb{N}} 1 v_n q^{-1} k'_n$. Mit Fall 2 folgt daraus

$$t(k) = q\, t(q^{-1}k) = q \sup_{n\in\mathbb{N}} t(v_n q^{-1} k'_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} t^*(v_n k'_n) \quad \text{und damit}$$

$$t^*(h) = \sup_{n\in\mathbb{N}} t^*(h_n).$$

Damit ist die Daniell-Stetigkeit von t^* gezeigt und Lemma (4.11) vollständig bewiesen.

Lemma (4.12) gibt zu einer beliebigen Vorbewertungs-Struktur einen Stoneschen Vektorverband und ein abstraktes Integral an.

(4.12) Lemma:

Es sei $(S,(X,\phi,\preceq),(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*))$ eine Vorbewertungs-Struktur, u Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\preceq)$ mit $u(\bar{a}) = 0$ und w Nutzenfunktion auf $(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*)$ mit $w(\bar{f}) = 0$.

Definiere $\preceq'$ auf $u\circ\mathcal{F} := \{u\circ f \mid f\in\mathcal{F}\}$ gemäß

$u\circ g \preceq' u\circ f$ genau dann, wenn $g \preceq^* f$

sowie $I: u\circ\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ gemäß $I(u\circ f) := w(f)$.

(Da aus $u\circ f \equiv u\circ g$ mit Satz (4.5)(1) folgt $f \sim^* g$ und wegen $f \sim^* g$ genau dann, wenn $w(f) = w(g)$, sind I und $\prec'$ wohldefiniert.)

Dann gilt:

$(u(X),\psi,<),(u\circ\mathcal{F},\psi',\prec')$ und I, wobei $<$ die von $\mathbb{R}$ auf $u(X)$ induzierte Ordnung und ψ bzw. ψ' die Konvexkombination auf $u(X)$ bzw. $u\circ\mathcal{F}$ ist, erfüllen die Voraussetzungen von Lemma (4.11).

Beweis: I. $u(X)$ ist eine konvexe Teilmenge der reellen Zahlen, denn mit $\alpha\in[0,1]$, $u(x),u(y)\in u(X)$ gilt

$\alpha u(x)+(1-\alpha)u(y) = u(\phi(\alpha;x,y))\in u(X)$.

Außerdem gilt $0\in u(X)$ wegen $u(\bar{a}) = 0$.

II. $u\circ\mathcal{F}$ ist eine Menge von Abbildungen von S in $u(X)\subset\mathbb{R}$.

zu (AX1'): Da u Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\prec)$ ist, gilt

$\psi'(\alpha;u\circ f,u\circ g)(s) = \alpha u\circ f(s)+(1-\alpha)u\circ g(s) = u(\phi(\alpha;f(s),g(s))) =$

$= u\circ\phi^*(\alpha;f,g)(s)$ für alle $s\in S$, also

$\psi'(\alpha;u\circ f,u\circ g)\in u\circ\mathcal{F}$. $u\circ\mathcal{F}$ ist also abgeschlossen gegenüber ψ'. Daraus und aus (AX1) folgt unmittelbar die Gültigkeit von (M1), (M2), (M3), (A1), (A2) und (A3) für $(u\circ\mathcal{F},\psi',\prec')$.

zu (AX2')(i): Sei $\bar{f}$ gemäß (AX2). Dann gilt

$u\circ\bar{f}(s) \equiv 0$ für alle $s\in S$, also $\sigma = u\circ\bar{f}\in u\circ\mathcal{F}$.

zu (AX2')(ii): Sei $\hat{f}$ gemäß (AX2). Dann erfüllt $u\circ\hat{f}$ (AX2')(ii) wegen $u\circ\hat{f}(s) \equiv u(\hat{a})$ für alle $s\in S$ und wegen $u\circ\hat{f} \nsim' \sigma$.

zu (AX3'): Sei $u\circ f,u\circ g\in u\circ\mathcal{F}$. Wegen (AX3) existiert $h\in\mathrm{Max}(f,g)\cap\mathcal{F}$ und wegen Definition (4.1)(a) gilt $u\circ h = \max(u\circ f,u\circ g)\in u\circ\mathcal{F}$, also ist $\max(u\circ f,u\circ g)\in u\circ\mathcal{F}$.

zu (AX4'): Sei $(u\circ g)(s)\leq(u\circ f)(s)$ für alle $s\in S$. Dann ist $g(s) \precsim f(s)$ für alle $s\in S$ und wegen (AX4) existieren $\gamma\in(0,1]$ und $k\in\mathcal{F}$ so, daß

$\phi(\gamma;f(s),\bar{f}(s))\sim \phi(\gamma;g(s),k(s))$ für alle $s\in S$.

Für dieses γ und $u\circ k$ gilt

$\gamma u\circ f = \gamma u\circ f+(1-\gamma)\mathcal{O} = u\circ\phi^*(\gamma;f,\bar{f})=(1-\gamma)u\circ k + \gamma u\circ g.$

Mit $\gamma\in(0,1]$ und $u\circ k\in u\circ\mathcal{F}$, wobei γ und k gemäß (AX4), ist also (AX4') erfüllt.

Sei nun $I(u\circ f) := w(f)$. Dann ist I Nutzenfunktion auf $(u\circ\mathcal{F},\psi',\precsim')$ mit $I(\mathcal{O}) = 0$; denn da u und w Nutzenfunktionen sind, gilt

$$I(\alpha u\circ f+(1-\alpha)u\circ g)= I(u\circ\phi^*(\alpha;f,g))= w(\phi^*(\alpha;f,g))= \alpha w(f)+(1-\alpha)w(g)=$$
$$= \alpha I(u\circ f)+(1-\alpha)I(u\circ g)$$

und nach Definition von $\precsim'$ und I auf $u\circ\mathcal{F}$ gilt

$u\circ g \precsim' u\circ f$ genau dann, wenn $I(u\circ g)< I(u\circ f)$.

zu (AX5'): Sei $u\circ f, u\circ f_n \in (u\circ\mathcal{F})^+$ und $v_n\in\mathbb{N}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ so, daß

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n = 1$ oder $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n = \infty$ und

$v_n u\circ f_n(s) \leq v_{n+1} u\circ f_{n+1}(s)$ für alle $s\in S$, $n\in\mathbb{N}$, sowie

$u\circ f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n u\circ f_n$.

Dann ist $f, f_n\in\mathcal{F}_o := \{f \mid f\in\mathcal{F},\ \bar{a} \precsim f(s)$ für alle $s\in S\}$ für alle $n\in\mathbb{N}$, und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und f erfüllen die Voraussetzungen von (AX5). Daher gilt

$w(f)= \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n w(f_n)$, also $I(u\circ f)= \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n I(u\circ f_n)$.

Damit ist die Gültigkeit von (AX5') gezeigt.

Mit Hilfe der Lemmata (4.11) und (4.12) und des Satzes von Daniell-Stone beweisen wir Satz (4.10).

Beweis von Satz (4.10):

Sei w Nutzenfunktion mit $w(\bar{f}) = 0$. Wegen (AX2) ist dann $w(\hat{f}) \neq 0$.

Aus dem Beweis von Satz (4.5)(2) folgt, daß $u(\hat{a}) \neq u(\bar{a}) = 0$.

Daher kann wegen Satz (3.3)(b) w so gewählt werden, daß

$w(\hat{f}) = u(\hat{a})$.

Aus Lemma (4.12) und Lemma (4.11) folgt:

$I^*: (u \circ \mathcal{F})^* \to \mathbb{R}$ gemäß $I^*(au \circ f - bu \circ g) := aI(u \circ f) - bI(u \circ g)$

ist ein abstraktes Integral auf dem Stoneschen Vektorverband $(u \circ \mathcal{F})^*$.

Nach dem Satz von Daniell-Stone (Satz (4.9)) existiert genau ein Maß π auf der σ-Algebra ${}^{B}\mathcal{G}((u \circ \mathcal{F})^*)$ mit

(a) $(u \circ \mathcal{F})^* \subset \mathcal{L}^1(\pi)$

(b) $I^*(h^*) = \int_S h^*(s)\, d\pi(s)$ für alle $h^* \in (u \circ \mathcal{F})^*$.

zu (1): Gilt wegen (a).

zu (2): Für $f \in \mathcal{F}$ gilt wegen (b)

$$w(f) = I(u \circ f) = I^*(u \circ f) = \int_S u \circ f(s)\, d\pi(s).$$

zu (3): Wegen $w(\hat{f}) = u(\hat{a}) \neq 0$ gilt

$$1 = \frac{1}{u(\hat{a})}\, w(\hat{f}) = \frac{1}{u(\hat{a})}\, I(u \circ \hat{f}) = I^*\left(\frac{1}{u(\hat{a})}\, u \circ \hat{f}\right) = I^*(1).$$

zu (4): Folgt aus (2) und $g \prec^* f$ genau dann, wenn $w(g) < w(f)$.

Damit ist Satz (4.10) bewiesen.

§5 Die Axiomensysteme von Anscombe und Aumann, Ferguson, Ferreira und Fishburn

Es gibt in der Literatur bereits eine Reihe von Axiomatisierungen für die subjektive Vorbewertung, denen die Theorie von von Neumann und Morgenstern zugrunde liegt (vgl. auch [13]).

Darunter befinden sich Axiomensysteme wie die von Fishburn [9] und Savage [26] angegebenen, die nur die Existenz und Eindeutigkeit eines Inhalts liefern. Auf diese Arbeiten soll hier nicht näher eingegangen werden. Denn für endliches S ist ein Inhalt zwar σ-additiv, aber die Axiomatisierung von Savage impliziert, daß S unendlich ist, und das von Fishburn in [9] aufgestellte Axiomensystem stimmt für endliches S mit dem in [8] überein.

Luce und Krantz [20] fassen eine Aktion f als Abbildung von einer (von f abhängenden) Teilmenge A_f von S in X auf und zeigen, daß unter gewissen Bedingungen "bedingte" endlich-additive Vorbewertungen P_A existieren. Sie verwenden die Theorie von von Neumann und Morgenstern nicht.

Fishburn [12] und Balch und Fishburn [2] stellen eine Aktion f nicht als Abbildung von S in X dar. Stattdessen betrachten sie eine Menge $\mathcal{L}$ von Aktions-Ereignis-Paaren (f,A) mit einer Präferenzrelation $\preceq$ und geben Bedingungen an, die die Existenz und Eindeutigkeit "bedingter" endlich-additiver Vorbewertungen P_A liefern, wobei A ein nichtleeres Element einer vorgegebenen (in [2] von f abhängenden) Ereignis-Algebra E ist.

Die Arbeiten von Luce und Krantz, Fishburn und Balch und Fishburn seien hier nur zitiert. Wir wollen das dort entwickelte

Konzept einer "bedingten" Vorbewertung nicht weiter verfolgen.

Anscombe und Aumann [1], Ferguson [4], Ferreira [5], Fishburn [8] und Fishburn [11] lösen das zu Beginn von Paragraph 4 formulierte Problem, indem sie Axiomensysteme angeben, die die Existenz (und Eindeutigkeit) einer subjektiven Vorbewertung auf einer geeigneten σ-Algebra über S liefern.

Diese Arbeiten sollen im folgenden in chronologischer Reihenfolge dargestellt werden. Die Bezeichnungen der Originalarbeiten werden dabei der Übersichtlichkeit wegen nicht übernommen.

Ferner wird stillschweigend von den Sätzen (1.2) und (3.7) Gebrauch gemacht. Sie besagen, daß es gleichgültig ist, ob man von einer schwachen Ordnung $\preceq$ oder von einer linearen Ordnung $\preceq$ ausgeht, wenn man dann $\sim$ und $\preceq$ gemäß (1.1)(b) bzw. $\sim$ und $\preceq$ gemäß (3.7) definiert.

Zunächst eine

(5.0) Vorbemerkung:

Sei $M^* := \{p \mid p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_{m_i},\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0,\ m_i \in M,\ n \in \mathbb{N}\}$

die Menge der einfachen Wahrscheinlichkeitsverteilungen über einer beliebigen Menge M. Dann wird durch die Abbildung $j: M \to M^*$ mit $j(m) := \varepsilon_m$ für alle $m \in M$ ein Isomorphismus von M auf $j(M) \subset M^*$ definiert . Im folgenden wird M, sofern keine Mißverständnisse zu befürchten sind, als Teilmenge von M^* aufgefaßt, ohne daß explizit auf diesen

Isomorphismus hingewiesen wird.

5.1 Das Axiomensystem (AN) von Anscombe und Aumann

Anscombe und Aumann haben folgende Problemstellung untersucht (vgl. [1]):

Gegeben:

$S = \{s_1,\ldots,s_n\}$, C beliebig,

$C_1 = \{x \mid x$ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über $C\}$,

$C_2 = \{x \mid x$ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über $C \cup C_1\}$,

$\mathcal{F} = \{f \mid f: S \to C \cup C_1 \cup C_2\} = \{[x_1,\ldots,x_n] \mid x_i \in C \cup C_1 \cup C_2,\ i=1,\ldots,n\}$,

$\mathcal{F}^* = \{p \mid p$ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\mathcal{F}\}$,

$\tilde{\mathcal{F}} = \{p \mid p$ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}^*\}$,

$\preceq$ binäre Relation auf $C \cup C_1 \cup C_2$,

$\preceq^*$ binäre Relation auf $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}^* \cup \tilde{\mathcal{F}}$.

Forderungen:

(AN1) Es existieren $c', c'' \in C$ so, daß $c' \prec c''$ sowie $c \preceq c''$ und $c' \preceq c$ für alle $c \in C$.

(AN2) $(C, C_1, \preceq)$ erfüllt das Axiomensystem von Luce und Raiffa.

(AN3) $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^*, \preceq^*)$ erfüllt das Axiomensystem von Luce und Raiffa.

(AN4) Wenn $x_i \preceq x_i'$, dann $[x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n] \preceq^* [x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_n]$.

(AN5) Für $x_{ij} \in C \cup C_1$ $(i=1,\ldots,k,\ j=1,\ldots,n)$ gilt

$$(r_1[x_{11},\ldots,x_{1n}],\ldots,r_k[x_{k1},\ldots,x_{kn}]) \sim^* [(r_1x_{11},\ldots,r_kx_{k1}),\ldots,(r_1x_{1n},\ldots,r_kx_{kn})].$$

(AN6) Für c', c'' gemäß (AN1) gilt $[c',\ldots,c'] \prec^* [c'',\ldots,c'']$.

Anscombe und Aumann beweisen folgenden

Satz:

Es gelte (AN1) bis (AN6). Ferner sei u die Funktion auf $C \cup C_1 \cup C_2$ gemäß Satz (3.5) mit $u(c') = 0$, $u(c'') = 1$ und w die Funktion auf $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}^* \cup \tilde{\mathcal{F}}$ gemäß Satz (3.5) mit $w([c',\ldots,c']) = 0$, $w([c'',\ldots,c'']) = 1$.

Dann gilt:

Es gibt genau eine reellwertige Funktion π auf S, so daß

$$\pi(s_i) \geq 0 \text{ für } i=1,\ldots,n, \quad \sum_{i=1}^{n} \pi(s_i) = 1 \text{ sowie}$$

$$w([x_1,\ldots,x_n]) = \sum_{i=1}^{n} \pi(s_i) u(x_i).$$

Bemerkungen:

1) $\pi(s_i)$ ist die "subjektive Wahrscheinlichkeit" für das Eintreten des Zustandes s_i der Natur.

2) $P: \mathfrak{P}(S) \to \mathbb{R}$ gemäß $P(B) = \sum_{i=1}^{n} \pi(s_i) \varepsilon_{s_i}(B)$ ist eine durch π eindeutig bestimmte subjektive Vorbewertung auf $\mathfrak{P}(S)$.

Interpretation der Forderungen (AN1) bis (AN6):

In der Terminologie von Anscombe und Aumann ist S die Menge der Ausgänge eines Pferderennens, C die Menge der Preise, $\mathcal{F}$ die Menge der Pferdelotterien und $\mathcal{F}^* \cup \tilde{\mathcal{F}}$ bzw. $C_1 \cup C_2$ die Menge der (einfachen und zusammengesetzten) Roulettelotterien mit Preisen in $\mathcal{F}$ bzw. C.

Forderung (AN1) besagt, daß es einen "besten" und einen "schlechtesten" Preis gibt, d.h. einen Preis, dem kein ande-

rer vorgezogen wird, und einen, der keinem anderen vorgezogen wird.

Zur Interpretation von (AN2) und (AN3) vgl. wieder [21].

Forderung (AN4) besagt: Wenn zwei Pferdelotterien bis auf die Preise in einem Ausgang übereinstimmen, wird die subjektive Präferenz zwischen den beiden Lotterien durch die Präferenz zwischen den beiden Preisen bestimmt.

Forderung (AN5) besagt: Wenn der Preis, den eine Person erhält, durch ein Pferderennen und ein Roulette-Spiel bestimmt wird, dann ist es gleichgültig, ob das Pferderennen vor oder nach dem Roulette-Spiel stattfindet.

Forderung (AN6) besagt, daß diejenige Pferdelotterie, bei der für jeden Ausgang des Pferderennens der beste Preis ausgezahlt wird, derjenigen vorgezogen wird, bei der für jeden Ausgang des Pferderennens der schlechteste Preis ausgezahlt wird.

5.2 Das Axiomensystem (FN) von Ferguson

Ferguson untersucht in [4] eine ähnliche Problemstellung wie Anscombe und Aumann. Er verwendet anstelle von $(C,C_1,\preceq)$ und $(\mathcal{F},\mathcal{F}^*,\preceq^*)$, die das Axiomensystem von Luce und Raiffa erfüllen, archimedisch schwachgeordnete Mischungsmengen $(X,\phi,\preceq)$ und $(\mathcal{F}^*,\phi^*,\preceq^*)$. Dabei sind X und $\mathcal{F}^*$ Mengen von einfachen Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ϕ und ϕ^* Konvexkombinationen. Die übrigen Axiome von Ferguson sind denjenigen von Anscombe und Aumann sehr ähnlich, (FN4) und (FN5) sind identisch mit (AN4) und (AN5).

Gegeben:

$S = \{s_1,\ldots,s_n\}$, C beliebig,

$X = \{x \mid x$ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über C$\}$,

$\phi: [0,1]\times X^2 \to X$ gemäß $\phi(\alpha;x,y) := \alpha x+(1-\alpha)y$ (Konvexkombination der Wahrscheinlichkeitsverteilungen),

$\mathcal{F} = \{f \mid f:S\to X\} = \{[x_1,\ldots,x_n] \mid x_i \in X,\ i=1,\ldots,n\}$,

$\mathcal{F}^* = \{p \mid p$ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\mathcal{F}\}$,

$\phi^*: [0,1]\times(\mathcal{F}^*)^2 \to \mathcal{F}^*$ gemäß $\phi^*(\alpha;p,q) := \alpha p+(1-\alpha)q$,

binäre Relationen $\prec$ auf (X,ϕ), $\prec^*$ auf $(\mathcal{F}^*,\phi^*)$.

Forderungen:

(FN1) Es existieren $x',x'' \in X$ mit $x' \prec x''$.

(FN2) $(X,\phi,\prec)$ ist archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge.

(FN3) $(\mathcal{F}^*,\phi^*,\prec^*)$ ist archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge.

(FN4) Wenn $x_i \prec x_i'$, dann $[x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n] \prec^* [x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_n]$.

(FN5) $(r_1[x_{11},\ldots,x_{1n}],\ldots,r_k[x_{k1},\ldots,x_{kn}]) \sim^*$

$$[(r_1x_{11},\ldots,r_kx_{k1}),\ldots,(r_1x_{1n},\ldots,r_kx_{kn})].$$

(FN6) Wenn $x \prec y$, dann $[x,\ldots,x] \prec^* [y,\ldots,y]$.

Ferguson beweist den folgenden

Satz:

Es gelten (FN2) bis (FN6). Dann gibt es Nutzenfunktionen u auf $(X,\phi,\prec)$ und w auf $(\mathcal{F}^*,\phi^*,\prec^*)$ sowie nichtnegative reelle Zahlen $\pi_1,\ldots,\pi_n$ mit $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$ so, daß $w([x_1,\ldots,x_n]) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i u(x_i)$.

Bemerkungen:

1) Wenn zusätzlich (FN1) gilt, sind die Zahlen π_i (i=1,...,n) eindeutig bestimmt (vgl. [4] S. 22, Exercise 5).

2) Die Interpretation der Axiome verläuft entsprechend wie bei Anscombe und Aumann.

5.3 Das Axiomensystem (FI) von Fishburn

Auch Fishburn betrachtet zunächst in [8] den Fall, daß S endlich ist:

Gegeben:

$S = \{s_1,\ldots,s_n\}$, C beliebig,

$X = \{x \mid x$ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über C$\}$,

$\phi:[0,1]\times X^2 \to X$ gemäß $\phi(\alpha;x,y) := \alpha x+(1-\alpha)y$,

$\mathcal{F} = \{f \mid f:S\to X\} = \{[x_1,\ldots,x_n] \mid x_i\in X,\ i=1,\ldots,n\}$,

$\phi^*:[0,1]\times \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}$ gemäß $\phi^*(\alpha;[x_1,\ldots,x_n],[y_1,\ldots,y_n]) :=$

$:= [\phi(\alpha;x_1,y_1),\ldots,\phi(\alpha;x_n,y_n)]$,

$\preceq^*$ binäre Relation auf $(\mathcal{F},\phi^*)$.

Definition:

Für $x,y\in X$ sei $x \preceq y$ genau dann, wenn $[x,\ldots,x] \preceq^* [y,\ldots,y]$.

Definition:

$s_i\in S$ ist Nullzustand genau dann, wenn $[x_1,\ldots,x_n] \sim^* [y_1,\ldots,y_n]$ für alle $[x_1,\ldots,x_n],[y_1,\ldots,y_n]\in\mathcal{F}$ mit $x_j = y_j$ für alle $j \neq i$.

Forderungen:

(FI1) $(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*)$ ist archimedisch schwachgeordnete Mischungs-

menge.

(FI2) Es existieren $[x_1,\ldots,x_n],[y_1,\ldots,y_n]\in\mathcal{F}$ mit

$[x_1,\ldots,x_n] \prec^* [y_1,\ldots,y_n]$.

(FI3) Sei $f,f'\in\mathcal{F}$ mit $f:=[x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n]$,

$f':= [x_1,\ldots,x_{i-1},y',x_{i+1},\ldots,x_n]$. Dann ist $f \preceq^* f'$, falls

$y \preceq y'$, und $f \prec^* f'$, falls $y \prec y'$ und s_i kein Nullzustand.

Fishburn beweist folgenden

Satz:

Es seien (FI1) bis (FI3) erfüllt und w sei Nutzenfunktion auf $(\mathcal{F},\phi^*,\prec^*)$. Ferner sei $u:X\to\mathbb{R}$ definiert gemäß $u(x) := w([x,\ldots,x])$.

Dann gilt:

Es gibt genau eine reellwertige Funktion π auf S so, daß

$\pi(s)\geq 0$ für alle $s\in S$, $\sum_{i=1}^{n} \pi(s_i)= 1$ und

$w([x_1,\ldots,x_n])= \sum_{i=1}^{n} \pi(s_i)u(x_i)$ für alle $[x_1,\ldots,x_n]\in\mathcal{F}$.

Ferner gilt:

$\pi(s)= 0$ genau dann, wenn s Nullzustand.

Interpretation der Forderungen (FI1) bis (FI3):

Zur Interpretation von (FI1) vgl. (1.7).

In (FI2) wird verlangt, daß es zwei Aktionen gibt, die von der Person im Sinne der Präferenz unterschieden werden (Nichttrivialität der Präferenzrelation $\prec^*$).

Die Monotonieforderung (FI3) besagt: Wenn die Ergebnisse zweier Aktionen f und f' nur für einen Zustand s_i der Natur nicht

übereinstimmen und das Ergebnis $f(s_i)$ dem Ergebnis $f'(s_i)$ nicht vorgezogen wird, dann wird auch die Aktion f der Aktion f' nicht vorgezogen. Wenn die Ergebnisse zweier Aktionen f und f' nur für einen Nicht-Nullzustand s_i der Natur nicht übereinstimmen und das Ergebnis $f'(s_i)$ dem Ergebnis $f(s_i)$ vorgezogen wird, dann wird auch die Aktion f' der Aktion f vorgezogen.

5.4 Das Axiomensystem (FIS) von Fishburn

In [11] setzt Fishburn X als Mischungsmenge voraus, die mit der Menge C der Konsequenzen "in enger Verbindung" steht. Als Beispiele nennt Fishburn

1. $X = C$, falls C ein reelles Intervall,
2. $X = \{x \mid x$ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über $C\}$.

Wir wollen hier nur den Teil der Arbeit Fishburns darstellen, in dem die Existenz einer subjektiven Vorbewertung bewiesen wird. Auf weitere Untersuchungen, die durchgeführt werden, nachdem die Existenz eines Inhalts auf einer Booleschen Algebra $\mathfrak{J}$ über S bewiesen ist, wollen wir hier nicht eingehen. Deshalb können wir hier von vornherein annehmen, daß statt einer Booleschen Algebra $\mathfrak{J}$ eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über S gegeben ist.

Gegeben:

S, C beliebige Mengen, $\mathfrak{A}$ σ-Algebra über S,

(X,ϕ) Mischungsmenge,

$\mathcal{F} = \{f \mid f:S \to X,\ f(S)$ endlich, $f^{-1}(\{x\}) \in \mathfrak{A}$ für alle $x \in X\}$,

$\phi^*: [0,1] \times \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}$ gemäß $\phi^*(\alpha;f,g)(s) := \phi(\alpha;f(s),g(s))$ für alle $s \in S$,

$\prec^*$ binäre Relation auf $(\mathcal{F},\phi^*)$.

Definition:

a) Für $x,y\in X$ sei $x \prec y$ genau dann, wenn $f \prec^* g$ für $f,g\in\mathcal{F}$ mit $f(s) \equiv x$, $g(s) \equiv y$ für alle $s\in S$.

b) $A\in\mathfrak{R}$ heißt Nullmenge genau dann, wenn $f \sim^* g$ für alle $f,g\in\mathcal{F}$ mit $f \equiv g$ auf $\bar{A} := \{s\in S \mid s\notin A\}$.

$\mathcal{N}$ bezeichne das System aller Nullmengen.

Forderungen:

(FIS1) $(\mathcal{F},\phi^*,\prec^*)$ ist archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge.

(FIS2) Es existieren $x_o,y_o\in X$ mit $x_o \prec y_o$.

(FIS3) Sei $A\in\mathfrak{R}-\mathcal{N}$, $f \equiv x$ auf A, $g \equiv y$ auf A und $f \equiv g$ auf $\bar{A}$. Dann gilt $f \prec^* g$ genau dann, wenn $x \prec y$.

(FIS4) Sei $A_n\in\mathfrak{R}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $A_n\subset A_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i =: A$.

Sei ferner $B\in\mathfrak{R}$, $x,y\in X$ mit $y \prec x$ sowie

$$f_n(s) := \begin{cases} x\,, & s\in A_n \\ y\,, & s\in\bar{A}_n \end{cases} \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N},$$

$$f_A(s) := \begin{cases} x\,, & s\in A \\ y\,, & s\in\bar{A} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_B(s) := \begin{cases} x\,, & s\in B \\ y\,, & s\in\bar{B}\,. \end{cases}$$

Dann gilt: Wenn $f_B \prec^* f_A$, dann existiert ein $n\in\mathbb{N}$ so, daß $f_B \prec^* f_n$.

Fishburn beweist folgenden

Satz:

a) Es gelte (FIS1), (FIS2) und (FIS3). Dann gibt es eine reellwertige Funktion u auf $(X,\phi,\prec)$ mit

$u(\phi(\alpha;x,y)) = \alpha u(x)+(1-\alpha)u(y)$ für alle $x,y\in X$ und alle $\alpha\in(0,1)$, und einen Inhalt π auf $\mathfrak{A}$ mit $\pi(S)=1$ derart, daß für alle $f,g\in\mathcal{F}$ und $A\in\mathfrak{A}$

(1) $g \prec^* f$ genau dann, wenn $\int_S u\circ g(s)\, d\pi(s) < \int_S u\circ f(s)\, d\pi(s)$,

(2) $\pi(A)=0$ genau dann, wenn $A\in\mathcal{N}$.

Weiter gilt: u' auf X und π' auf $\mathfrak{A}$ erfüllen (1) anstelle von u und π genau dann, wenn $\pi'=\pi$ und $u'=qu+r$ mit $q\in\mathbb{R}^+$ und $r\in\mathbb{R}$.

b) Es gelte (FIS1) bis (FIS4). Dann ist der Inhalt π auf $\mathfrak{A}$ gemäß Teil (a) σ-additiv, also π ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{A}$.

Bemerkung:

Mit $\prec$ auf X gemäß Definition ist u Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\prec)$, wie sich sofort aus (1) ergibt.

Interpretation der Forderung (FIS4):

Weil die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und $A:=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, kann man argumentieren, daß für hinreichend großes n A_n und A praktisch nicht mehr unterschieden werden können. Entsprechend soll dann, falls die Aktion f_A der Aktion f_B vorgezogen wird, auch Aktion f_n für genügend großes n der Aktion f_B vorgezogen

werden; d.h. für hinreichend großes n unterscheidet sich die Richtung der Präferenz zwischen f_A und f_B nicht mehr von der zwischen f_n und f_B.

Die Interpretation der Forderungen (FIS1) bis (FIS3) verläuft analog zu derjenigen von (FI1) bis (FI3).

5.5 Das Axiomensystem (FA) von Ferreira

Ferreira [5] verallgemeinert den Ansatz von Ferguson [4] für beliebiges S.

Gegeben:

S, C beliebige Mengen,

$X = \{x \mid x \text{ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über } C\}$,

$\phi: [0,1] \times X^2 \to X$ gemäß $\phi(\alpha;x,y) := \alpha x + (1-\alpha)y$,

$\mathcal{F} = \{f \mid f: S \to X\}$,

$\mathcal{F}^* = \{p \mid p \text{ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über } \mathcal{F}\}$,

$\phi^*: [0,1] \times (\mathcal{F}^*)^2 \to \mathcal{F}^*$ gemäß $\phi^*(\alpha;p,q) := \alpha p + (1-\alpha)q$,

binäre Relationen $\preceq$ auf (X,ϕ), $\preceq^*$ auf $(\mathcal{F}^*,\phi^*)$.

Definition:

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen auf $\mathcal{F}$ heißt von oben konvergent gegen $f\in\mathcal{F}$ genau dann, wenn $f_{n+1} \preceq^* f_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und für $A_n := \{s \mid f_n(s) \neq f(s)\}$ $(n\in\mathbb{N})$ gilt $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$.

Forderungen:

(FA1) $(X,\phi,\preceq)$ ist archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge.

(FA2) $(\mathcal{F}^*, \phi^*, \prec^*)$ ist archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge.

(FA3) Wenn $f,g \in \mathcal{F}$ mit $g(s) \nprec f(s)$ für alle $s \in S$, dann $g \nprec^* f$.

(FA4) Wenn $x,y \in X$ mit $x \prec y$ und $f(s) \equiv x$, $g(s) \equiv y$ für alle $s \in S$, dann $f \prec^* g$.

(FA5) $(r_1 f_1, \ldots, r_k f_k) \sim^* g$, wobei $g(s) = \sum_{i=1}^{n} r_i f_i(s)$ für alle $s \in S$.

(FA6) Sei $f,g \in \mathcal{F}$. Wenn die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{F}$ von oben gegen f konvergiert und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $g \nprec^* f_n$, dann gilt $g \nprec^* f$.

Ferreira beweist folgenden

Satz:

Es gelte (FA1) bis (FA6). Dann existieren Nutzenfunktionen u auf $(X, \phi, \prec)$ und w auf $(\mathcal{F}^*, \phi^*, \prec^*)$ sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß π auf $\mathcal{P}(S)$ derart, daß

$$w(f) = \int_S u \circ f(s)\, d\pi(s) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}.$$

Interpretation der Forderungen:

Zur Interpretation von (FA1) und (FA2) vgl. (1.7).

(FA3) bis (FA5) wird analog zu (AN4) bis (AN6) interpretiert.

Forderung (FA6) besagt: Wenn für die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Aktionen gilt: f_{n+1} wird f_n nicht vorgezogen, und wenn die Anzahl der Zustände der Natur, für die die Konsequenz $f_n(s)$ von $f(s)$ verschieden ist, für genügend großes n beliebig klein wird, dann soll eine Aktion g, die für kein n der Aktion f_n vorge-

zogen wird, auch nicht der Aktion f vorgezogen werden. Ähnlich wie bei (FIS4) kann man hier argumentieren, daß für genügend großes n die Aktionen f_n von f praktisch nicht mehr unterschieden werden können; entsprechend soll sich dann auch die Richtung der Präferenz zwischen der Aktion f_n und einer Aktion g nicht mehr von der zwischen f und g unterscheiden.

§6 Vergleich der vorgestellten Axiomensysteme

Wir wollen jetzt die in Paragraph 5 dargestellten Axiomensysteme mit dem Axiomensystem (AX) vergleichen. Es wird sich herausstellen, daß die von Ferguson und Fishburn bearbeiteten Problemstellungen selbst Vorbewertungs-Strukturen sind, während die von Anscombe und Aumann untersuchte Fragestellung in eine Vorbewertungs-Struktur eingebettet werden kann. Für den von Ferreira behandelten Fall hängt es von einer Fallunterscheidung ab, ob bereits eine Vorbewertungs-Struktur vorliegt oder ob eine Einbettung in eine solche existiert. In allen Fällen kann also die Existenz und Eindeutigkeit einer subjektiven Vorbewertung auch mit Hilfe von Satz (4.10) bewiesen werden.

In Teil 6.6 wird darüber hinaus ein Beispiel angegeben, das nicht in der in Paragraph 5 referierten Literatur enthalten ist, aber eine Anwendung der Ergebnisse von Paragraph 4 zuläßt.

Um verschiedene Betrachtungen nicht mehrfach durchführen zu müssen, werden wir für den Vergleich der Axiomensysteme die chronologische Reihenfolge aus Paragraph 5 nicht beibehalten.

6.1 Die Axiomensysteme (FA) und (AX)

Für die Untersuchung der von Ferreira bearbeiteten Problemstellung setzen wir zusätzlich die Nichttrivialität der Präferenzrelation $\succ$ auf X voraus. Dies bedeutet keine wesentliche Einschränkung. Denn im Falle der Trivialität dieser Prä-

ferenzrelation ist klar, daß eine subjektive Vorbewertung existiert, diese aber für $|C|>1$ nicht mehr eindeutig sein kann, weil dann jedes Wahrscheinlichkeitsmaß über S eine subjektive Vorbewertung ist.

Die Antwort auf die Frage, ob das von Ferreira aufgestellte Axiomensystem eine Vorbewertungs-Struktur ist, hängt von der Struktur von X bzw. C ab: Falls eine (und damit jede) Nutzenfunktion u auf $(X,\phi,\prec)$ entweder unbeschränkt oder beschränkt oder nach unten beschränkt ist, ist Ferreira's Axiomensystem eine Vorbewertungs-Struktur (Satz (6.1.a)), falls u nach oben und nicht nach unten beschränkt ist, existiert nur eine Einbettung in eine Vorbewertungs-Struktur (Satz (6.1.b)).

(6.1.a) Satz:

Es gelten die Voraussetzungen und Festlegungen der von Ferreira [5] untersuchten Problemstellung sowie

(NT) Es existieren $x_o, y_o \in X$ mit $x_o \prec y_o$.

Ferner sei jede Nutzenfunktion u auf $(X,\phi,\prec)$ beschränkt, falls sie nach oben beschränkt ist.

Dann gilt:

$(S,(X,\phi,\prec),(\mathcal{F},\phi',\prec^*))$ ist eine Vorbewertungs-Struktur, wobei $\phi':[0,1]\times\mathcal{F}^2\to\mathcal{F}$ definiert wird gemäß $\phi'(\alpha;f,g)(s) := \phi(\alpha;f(s),g(s))$ für alle $s\in S$.

Beweis: Zum Beweis des Satzes verwenden wir die Bezeichnungen von §5.5.

Vorbemerkung: $\prec^*$ auf $\mathcal{F}$ ist im Sinne des Isomorphismus j aus Vorbemerkung (5.0) zu verstehen: Es gelte $g \prec^* f$ genau dann,

wenn $j(g) := \varepsilon_g \prec^* \varepsilon_f =: j(f)$. Im Beweis von (AX1) nehmen wir die in dieser Vorbemerkung angegebene Identifizierung von $\mathcal{F}$ und $j(\mathcal{F})$ nicht vor, um Mißverständnisse zu vermeiden, die sich aus einer Verwechslung der Abbildungen

$\phi^*\big|_{j(\mathcal{F})} : [0,1] \times (j(\mathcal{F}))^2 \to j(\mathcal{F})$ und

$\phi' : [0,1] \times \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}$ ergeben könnten.

zu (AX1): Da (X,ϕ) Mischungsmenge, folgt unmittelbar aus der Definition von ϕ', daß $(\mathcal{F},\phi')$ Mischungsmenge.

zu (A1): $\prec^*$ ist schwache Ordnung auf $\mathcal{F}$, da $\prec^*$ schwache Ordnung auf $\{\varepsilon_f | f \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{F}^*$.

zu (A2): Sei $f \prec^* g$, also $\varepsilon_f \prec^* \varepsilon_g$. Sei ferner $h \in \mathcal{F}$ sowie $a \in (0,1)$. Dann folgt aus der Gültigkeit von (A2) auf $\mathcal{F}^*$

$$\alpha\varepsilon_f + (1-\alpha)\varepsilon_h \prec^* \alpha\varepsilon_g + (1-\alpha)\varepsilon_h .$$

Mit $f'(s) := \alpha f(s) + (1-\alpha)h(s)$ und $g'(s) := \alpha g(s) + (1-\alpha)h(s)$ für alle $s \in S$, also $f' = \phi'(\alpha; f, h)$ und $g' = \phi'(\alpha; g, h)$, und mit (FA5) folgt daraus

$$\varepsilon_{f'} \prec^* \varepsilon_{g'} \text{, also } \phi'(\alpha; f, h) \prec^* \phi'(\alpha; g, h).$$

zu (A3): Sei $f,g,h \in \mathcal{F}$ mit $f \prec^* g$ und $g \prec^* h$.
Aus der Gültigkeit von (A3) für $\mathcal{F}^*$ folgt die Existenz von $\alpha \in (0,1)$ und $\beta \in (0,1)$ so, daß

$$\alpha\varepsilon_f + (1-\alpha)\varepsilon_h \prec^* \varepsilon_g \quad \text{und} \quad \varepsilon_g \prec^* \beta\varepsilon_f + (1-\beta)\varepsilon_h .$$

Für dieses $\alpha \in (0,1)$ und $\beta \in (0,1)$ gilt dann wegen (FA5)

$$\phi'(\alpha; f, h) \prec^* g \quad \text{und} \quad g \prec^* \phi'(\beta; f, h).$$

Damit ist gezeigt, daß $(\mathcal{F},\phi',\prec^*)$ eine archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge ist.

zu (AX2): Da $\mathcal{F}$ alle Abbildungen von S in X enthält, ist $\overline{f} \in \mathcal{F}$

und $\hat{f} \in \mathcal{F}$, wenn man mit $x_o, y_o \in X$ gemäß Voraussetzung (NT) definiert: $\bar{f}(s) := x_o$ und $\hat{f}(s) := y_o$ für alle $s \in S$.

Ferner gilt wegen (FA4) $\bar{f} \downarrow^* \hat{f}$.

zu (AX3): Sei u Nutzenfunktion auf $(X, \phi, \prec)$ und $f, g \in \mathcal{F}$.

Sei $h(s) := \begin{cases} f(s) & , g(s) \not\prec f(s) \\ g(s) & , \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $h \in \mathcal{F}$ und $u(h(s)) =$

$= \max(u(f(s)), u(g(s)))$ für alle $s \in S$, also $\text{Max}(f,g) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

zu (AX4): Sei u Nutzenfunktion auf $(X, \phi, \prec)$ mit $u(x_o) = 0$ und sei $f, g \in \mathcal{F}$ mit $g(s) \not\prec f(s)$ für alle $s \in S$. Aus der Voraussetzung an u ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: u ist nicht nach oben beschränkt.

Setze $\gamma := \frac{1}{2}$. Dann gilt

$0 \leq t(s) := \frac{\gamma}{1-\gamma} (u(f(s)) - u(g(s))) = u(f(s)) - u(g(s))$ für alle $s \in S$. Wähle $k \in \mathcal{F}$ so, daß $u(k(s)) = t(s)$ für alle $s \in S$. Da u nicht nach oben beschränkt ist, ist dies für alle $s \in S$ möglich. Dann gilt

$$u\left(\tfrac{1}{2} f(s) + \tfrac{1}{2} \bar{f}(s)\right) = \tfrac{1}{2} u(f(s)) = \tfrac{1}{2} u(k(s)) + \tfrac{1}{2} u(g(s)) =$$

$$= u\left(\tfrac{1}{2} g(s) + \tfrac{1}{2} k(s)\right),$$

also $\frac{1}{2} f(s) + \frac{1}{2} \bar{f}(s) \sim \frac{1}{2} g(s) + \frac{1}{2} k(s)$ für alle $s \in S$.

Fall 2: u ist beschränkt.

Wegen $u(y_o) > 0$ ist dann $b := \sup_{x \in X} u(x) > 0$ und mit geeignetem $a \leq 0$ gilt $a \leq u(x) \leq b$ für alle $x \in X$.

Setze $\gamma := \frac{b}{3(b-a)}$. Dann ist $\gamma \in (0,1)$ und es gilt

$$0 \leq t(s) := \frac{\gamma}{1-\gamma}(u(f(s)) - u(g(s))) = \frac{b(u(f(s)) - u(g(s)))}{2b - 3a} \leq$$

$$\leq \frac{b(b-a)}{2(b-1{,}5\,a)} < b \quad \text{für alle } s \in S.$$

Wegen $0 \leq t(s) < \sup_{x \in X} u(x)$ ist $k \in \mathcal{F}$ so wählbar, daß

$u(k(s)) = t(s)$ für alle $s \in S$. Damit folgt

$\gamma f(s) + (1-\gamma)\bar{f}(s) \sim \gamma g(s) + (1-\gamma)k(s)$ für alle $s \in S$.

zu (AX5): Sei w Nutzenfunktion auf $(\mathcal{F}, \phi', \preccurlyeq^*)$ mit $w(\bar{f}) = 0$.

Sei $f_n \in \mathcal{F}_0 := \{f \mid f \in \mathcal{F}, x_0 \preccurlyeq f(s) \text{ für alle } s \in S\}$ und $v_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so, daß $\sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = 1$ oder $\sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = \infty$ sowie

$v_n u(f_n(s)) \leq v_{n+1} u(f_{n+1}(s))$ für alle $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$,

und es existiere ein $f \in \mathcal{F}$ mit

$u(f(s)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n u(f_n(s))$ für alle $s \in S$.

Fall 1: $\sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = 1$.

Dann ist $v_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.

Dann gilt $u(f_n(s)) \leq u(f(s))$ für alle $s \in S$.

Wegen (AX4) folgt daraus mit festem γ wie im Beweis zu (AX4)

(i) $\gamma f(s) + (1-\gamma)\bar{f}(s) \sim (1-\gamma)k_n(s) + \gamma f_n(s)$ für alle $s \in S$, wobei $k_n \in \mathcal{F}$.

Damit folgt $u(k_{n+1}) \leq u(k_n(s))$ für alle $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $u(f(s)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} u(f_n(s))$ gilt für alle $s \in S$

$$0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\gamma}{1-\gamma}\,(u(f(s)) - u(f_n(s))) = \inf_{n \in \mathbb{N}} u(k_n(s)).$$

Also ist die Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise monoton fallend und

$\bar{f} \in \operatorname{Inf} k_n$ (s. Definition (4.1)(b),(c)).

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < 1$ vorgegeben.

Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ $k_n^\varepsilon \in \mathcal{F}$ gemäß

$$k_n^\varepsilon(s) := \begin{cases} k_n(s) & \text{falls } \varepsilon u(y_o) < u(k_n(s)) \\ \varepsilon y_o + (1-\varepsilon)x_o & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung: a) $(k_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}}$ ist von oben konvergent gegen $\varepsilon\hat{f}+(1-\varepsilon)\bar{f}$.

b) Es gilt $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} w(k_n^\varepsilon) = \varepsilon w(\hat{f})$.

Beweis: zu a): Für $n\in\mathbb{N}$ sei $A_n := \{s \mid k_n^\varepsilon(s) \neq \varepsilon y_o + (1-\varepsilon)x_o\}$.

Da die Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton fällt, gilt $A_{n+1} \subset A_n$

für alle $n\in\mathbb{N}$ sowie $k_{n+1}^\varepsilon \preccurlyeq^* k_n^\varepsilon$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Wegen $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u(k_n(s)) = 0$ für alle $s\in S$ gilt:

Zu jedem $s\in S$ existiert ein $n_o(s,\varepsilon)$ so, daß

$u(k_n(s)) < \varepsilon u(y_o)$ für alle $n \geq n_o(s,\varepsilon)$. Daher ist

$k_n^\varepsilon(s) = \varepsilon y_o + (1-\varepsilon)x_o$ für alle $n \geq n_o(s,\varepsilon)$ und folglich

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Damit folgt Behauptung a).

zu b): Wegen $\varepsilon\hat{f}+(1-\varepsilon)\bar{f} \preccurlyeq^* k_n^\varepsilon$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ist

$$\varepsilon w(\hat{f}) = w(\varepsilon\hat{f}+(1-\varepsilon)\bar{f}) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} w(k_n^\varepsilon).$$

Bleibt zu zeigen, daß $\varepsilon w(\hat{f}) \geq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} w(k_n^\varepsilon)$.

Sei $0 < \gamma < 1$. Dann existiert ein $n_o\in\mathbb{N}$ mit

$\gamma w(k_{n_o}^\varepsilon) \leq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} w(k_n^\varepsilon)$. Daraus folgt für alle $n\in\mathbb{N}$

$w(\gamma k_{n_o}^\varepsilon + (1-\gamma)\bar{f}) = \gamma w(k_{n_o}^\varepsilon) \leq w(k_n^\varepsilon)$, also $\gamma k_{n_o}^\varepsilon + (1-\gamma)\bar{f} \preccurlyeq^* k_n^\varepsilon$.

Wegen (FA6) folgt daraus $\gamma k_{n_o}^\varepsilon + (1-\gamma)\bar{f} \preccurlyeq^* \varepsilon\hat{f}+(1-\varepsilon)\bar{f}$. Daher gilt

$\gamma \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} w(k_n^\varepsilon) \leq \gamma w(k_{n_o}^\varepsilon) \leq \varepsilon w(\hat{f})$. Da γ mit $0 < \gamma < 1$ beliebig war,

liefert Grenzübergang $\gamma \to 1$ $\varepsilon w(\hat{f}) \geq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} w(k_n^\varepsilon)$.

Zusammen mit $\varepsilon w(\hat{f}) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} w(k_n^\varepsilon)$ liefert das Behauptung b).

Aus $k_n(s) \preccurlyeq k_n^\varepsilon(s)$ für alle $s\in S$, $n\in\mathbb{N}$ folgt wegen (FA3)

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} w(k_n) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} w(k_n^\varepsilon) = \varepsilon w(\hat{f}).$$

Da ε mit $0<\varepsilon<1$ beliebig war, liefert Grenzübergang $\varepsilon \to 0$

$\inf_{n\in\mathbb{N}} w(k_n) = 0$. Damit und mit (i) (s. Seite 76) folgt

$$w(f) = w(f) - \frac{1-\gamma}{\gamma} \inf_{n\in\mathbb{N}} w(k_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(w(f) - \frac{1-\gamma}{\gamma} w(k_n)\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} w(f_n).$$

Damit ist (AX5) bewiesen, falls $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = 1$.

<u>Fall 2:</u> $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = \infty$.

Sei $n\in\mathbb{N}$ fest. Dann gilt

$v_n u(f_n(s)) \leq u(f(s))$ für alle $s\in S$. Da $\mathcal{F}$ die Menge aller Abbildungen von S in X ist, existiert ein $f_n'\in\mathcal{F}$ mit

$u(f_n'(s)) = v_n u(f_n(s))$ für alle $s\in S$. Daraus folgt

$$u(f_n(s)) = \frac{1}{v_n} u(f_n'(s)) + \frac{v_n-1}{v_n} u(\bar{f}(s)) = u\left(\frac{1}{v_n} f_n'(s) + \frac{v_n-1}{v_n} \bar{f}(s)\right).$$

Wegen (FA3) gilt

$$w(f_n) = w\left(\phi'\left(\frac{1}{v_n}; f_n', \bar{f}\right)\right) = \frac{1}{v_n} w(f_n') \text{ und damit}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} w(f_n') = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n w(f_n).$$

Nun gilt aber $f_n'\in\mathcal{F}_o$, $u(f_n'(s)) \leq u(f_{n+1}'(s))$ für alle $s\in S$, $n\in\mathbb{N}$

sowie $u(f(s)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} u(f'(s))$ für alle $s\in S$.

Aus Fall 1 folgt daher $w(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} w(f_n')$.

Somit gilt $w(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n w(f_n)$, was zu zeigen war.

Damit ist Satz (6.1.a) bewiesen.

(6.1.b) Satz:

Es gelten die Voraussetzungen und Festlegungen der von Ferreira [5] untersuchten Problemstellung sowie

(NT) Es existieren $x_o, y_o \in X$ mit $x_o \prec y_o$.

Ferner sei jede Nutzenfunktion u auf $(X,\phi,\prec)$ nach oben beschränkt und nach unten unbeschränkt.

Dann existiert eine Einbettung von $(S,(X,\phi,\prec),(\mathfrak{F}^*,\phi^*,\prec^*))$ in eine Vorbewertungs-Struktur $(S,(\tilde{X},\tilde{\phi},\tilde{\prec}),(\tilde{\mathfrak{F}},\tilde{\phi}',\tilde{\prec}^*))$.

Beweis: Zum Beweis des Satzes verwenden wir die Bezeichnungen von §5.5.

Sei u eine Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\prec)$ mit $u(x_o) = 0$.

I. Konstruktion von $(\tilde{X},\tilde{\phi},\tilde{\prec})$.

Dazu wird zunächst die Konsequenzenmenge C erweitert:

$\tilde{C} := C \cup C'$, wobei $C' := \{-d \mid d \in C,\ -u(d) > u(c) \text{ für alle } c \in C\}$.

Weiter sei

$\tilde{X} := \{x \mid x \text{ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über } \tilde{C}\}$ und

$\tilde{\phi}: [0,1] \times \tilde{X}^2 \to \tilde{X}$ gemäß $\tilde{\phi}(\alpha;x,y) := \alpha x + (1-\alpha)y$.

Definiere $\tilde{u}$ auf $\tilde{C}$ gemäß $\tilde{u}(c) := \begin{cases} u(c) & , c \in C \\ -u(d) & , c = -d \in C' \end{cases}$.

Definiere $\tilde{\prec}$ auf $\tilde{X}$ gemäß

$x \tilde{\prec} y$ genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{u}(x_i) < \sum_{j=1}^{m} \beta_j \tilde{u}(y_j)$, wobei

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j.$$

Behauptung 1: $(\tilde{X},\tilde{\phi},\tilde{\prec})$ ist archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge.

Beweis 1: $(\tilde{X},\tilde{\phi})$ ist Mischungsmenge.

Sei $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j$, $z = \sum_{k=1}^{l} \gamma_k z_k$.

zu (A1): Wenn $x \prec^{\sim} y$, dann ist $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{u}(x_i) < \sum_{j=1}^{m} \beta_j \tilde{u}(y_j)$

und daher nicht $y \prec^{\sim} x$.

Wenn nicht $x \prec^{\sim} y$ und nicht $y \prec^{\sim} z$, dann ist

$\sum_{k=1}^{l} \gamma_k \tilde{u}(z_k) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{u}(x_i)$ und daher nicht $x \prec^{\sim} z$.

zu (A2): Sei $x \prec^{\sim} y$ und $\alpha \in (0,1)$. Dann ist für $z \in \tilde{X}$

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{u}(x_i) + (1-\alpha) \sum_{k=1}^{l} \gamma_k \tilde{u}(z_k) < \alpha \sum_{j=1}^{m} \beta_j \tilde{u}(y_j) + (1-\alpha) \sum_{k=1}^{l} \gamma_k \tilde{u}(z_k)$$

und daher $\tilde{\phi}(\alpha;x,z) \prec^{\sim} \tilde{\phi}(\alpha;y,z)$.

zu (A3): Folgt sofort aus der Gültigkeit des Archimedischen Axioms in $\mathbb{R}$.

Damit ist Behauptung 1 bewiesen.

Bemerkung: Unter den Nutzenfunktionen auf $(\tilde{X},\tilde{\phi},\prec^{\sim})$, die gemäß Satz (1.6) existieren, gibt es genau eine, die auf $\tilde{C}$ mit $\tilde{u}$ übereinstimmt. Sie werde ebenfalls mit $\tilde{u}$ bezeichnet.

II. Konstruktion von $(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\phi}',\prec^{\sim *})$.

Sei $\mathcal{F}' := \{f' \mid f' : S \to \tilde{X}$, es existiert $f \in \mathcal{F}$ so, daß $\tilde{u}(f'(s)) = \tilde{u}(f(s))$ für alle $s \in S\}$,

$\mathcal{F}'' := \{f'' \mid f'' : S \to \tilde{X}$, es existiert $f \in \mathcal{F}$ so, daß $\tilde{u}(f''(s)) = -\tilde{u}(f(s))$ für alle $s \in S\}$ sowie

$\tilde{\mathcal{F}} := \{\alpha f' + (1-\alpha) f'' \mid f' \in \mathcal{F}', f'' \in \mathcal{F}'', \alpha \in [0,1]\}$.

Da $(\mathcal{F},\phi',\prec^{*})$ archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge ist (vgl. Beweis zu Satz (6.1.a),(AX1)), existiert eine Nutzenfunktion w auf $(\mathcal{F},\phi',\prec^{*})$ mit $w(\bar{f}) = 0$, wobei $\bar{f}(s) :\equiv x_o$ für alle $s \in S$.

Definiere $w':\mathcal{F}' \to \mathbb{R}$ gemäß $w'(f') = w(f)$ für $f \in \mathcal{F}$ mit

$$\tilde{u}(f(s)) = \tilde{u}(f'(s)) \text{ für alle } s \in S,$$

sowie $w'':\mathcal{F}'' \to \mathbb{R}$ gemäß $w''(f'') = -w(f)$ für $f \in \mathcal{F}$ mit

$$-\tilde{u}(f(s)) = \tilde{u}(f''(s)) \text{ für alle } s \in S.$$

Wegen (FA3) sind w' und w'' wohldefiniert.

Definiere $\tilde{w}: \tilde{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ gemäß $\tilde{w}(\alpha f' + (1-\alpha) f'') = \alpha w'(f') + (1-\alpha) w''(f'')$.

Behauptung 2: $\tilde{w}$ auf $\tilde{\mathcal{F}}$ ist wohldefiniert.

Beweis 2: Sei $\alpha f' + (1-\alpha) f'' = \beta g' + (1-\beta) g''$ mit $f', g' \in \mathcal{F}'$, $f'', g'' \in \mathcal{F}''$.
Sei o.B.d.A. $\alpha \geq \beta$. Dann ist $\gamma := 1 + \alpha - \beta \geq 1$ und es gilt

$$\frac{\alpha}{\gamma} \tilde{u}(f'(s)) - \frac{1-\beta}{\gamma} \tilde{u}(g''(s)) = \frac{\beta}{\gamma} \tilde{u}(g'(s)) - \frac{1-\alpha}{\gamma} \tilde{u}(f''(s)).$$

Nach Voraussetzung existieren $f_1', f_1'', g_1', g_1'' \in \mathcal{F}$ so, daß für alle $s \in S$

$$\tilde{u}(f'(s)) = \tilde{u}(f_1'(s)), \quad -\tilde{u}(f''(s)) = \tilde{u}(f_1''(s)),$$

$$\tilde{u}(g'(s)) = \tilde{u}(g_1'(s)), \quad -\tilde{u}(g''(s)) = \tilde{u}(g_1''(s)) \text{ und damit}$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} \tilde{u}(f_1'(s)) + \frac{1-\beta}{\gamma} \tilde{u}(g_1''(s)) =$$

$$= \frac{\beta}{\gamma} \tilde{u}(g_1'(s)) + \frac{1-\alpha}{\gamma} \tilde{u}(f_1''(s)) + \frac{2(\alpha-\beta)}{\gamma} \tilde{u}(\bar{f}(s)).$$

Da $(\mathcal{F}, \phi')$ Mischungsmenge ist, gilt

$$\phi'\left(\frac{\alpha}{\gamma}; f_1', g_1''\right) \in \mathcal{F} \text{ und } \phi'\left(\frac{1-\alpha+\beta}{\gamma}; \phi'\left(\frac{\beta}{1-\alpha+\beta}; g_1', f_1''\right), \bar{f}\right) \in \mathcal{F}$$

und wegen (FA3) ist

$$\frac{1}{\gamma}(\alpha w(f_1') + (1-\beta) w(g_1'')) = \frac{1}{\gamma}(\beta w(g_1') + (1-\alpha) w(f_1'')).$$

Wegen $w(f_1') = w'(f')$, $w(g_1'') = -w''(g'')$, $w(g_1') = w'(g')$ und

$w(f_1'') = -w''(f'')$ folgt daraus

$$\alpha w'(f') + (1-\alpha) w''(f'') = \beta w'(g') + (1-\beta) w''(g'').$$

Damit ist Behauptung 2 bewiesen.

Sei $\tilde{\mathcal{F}}^* := \{p \mid p \text{ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über } \tilde{\mathcal{F}}\}$

sowie $\phi^*:[0,1]\times\tilde{\mathcal{F}}^{*2}\to\tilde{\mathcal{F}}^*$ gemäß $\phi^*(\alpha;p,q):=\alpha p+(1-\alpha)q$.

Definiere $\prec^*$ auf $\tilde{\mathcal{F}}^*$ gemäß $p \prec^* q$ genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\tilde{w}(f_i) < \sum_{j=1}^{m}\beta_j\tilde{w}(g_j), \text{ wobei } p=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varepsilon_{f_i},\ q=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\varepsilon_{g_j}.$$

Sei ferner $\phi':[0,1]\times\tilde{\mathcal{F}}^2\to\tilde{X}^S$ definiert gemäß

$$\phi'(\gamma;f,g)(s)=\phi(\gamma;f(s),g(s))=\gamma f(s)+(1-\gamma)g(s) \text{ für alle } s\in S.$$

Behauptung 3: $\phi'([0,1]\times\tilde{\mathcal{F}}^2)\subset\tilde{\mathcal{F}}$.

Beweis 3: Sei $f,g\in\tilde{\mathcal{F}}$ mit $f=\alpha f'+(1-\alpha)f''$, $g=\beta g'+(1-\beta)g''$, $f',g'\in\mathcal{F}'$, $f'',g''\in\mathcal{F}''$.

Fall 1: $\gamma=0$. Dann ist $\phi'(\gamma;f,g)=g\in\tilde{\mathcal{F}}$.

Fall 2: $\gamma=1$. Dann ist $\phi'(\gamma;f,g)=f\in\tilde{\mathcal{F}}$.

Fall 3: $\gamma\in(0,1)$.

Fall 3.1: $\alpha=\beta=0$. Dann ist für alle $s\in S$

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\phi'(\gamma;f,g)(s)) &= \tilde{u}(\gamma f''(s)+(1-\gamma)g''(s))\\ &= \gamma\tilde{u}(f''(s))+(1-\gamma)\tilde{u}(g''(s))\\ &= -\tilde{u}((\gamma f_1''+(1-\gamma)g_1'')(s)),\end{aligned}$$

wobei $f_1'',g_1''\in\mathcal{F}$ derart, daß $-\tilde{u}(f_1''(s))=\tilde{u}(f''(s))$ und

$-\tilde{u}(g_1''(s))=\tilde{u}(g''(s))$ für alle $s\in S$.

Daher gilt $\phi'(\gamma;f,g)\in\mathcal{F}''\subset\tilde{\mathcal{F}}$.

Fall 3.2: $\alpha=\beta=1$. Dann ist für alle $s\in S$

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\phi'(\gamma;f,g)(s)) &= \tilde{u}(\gamma f'(s)+(1-\gamma)g'(s))\\ &= \tilde{u}(\gamma f_1'+(1-\gamma)g_1')(s)),\end{aligned}$$

wobei $f_1',g_1'\in\mathcal{F}$ derart, daß $\tilde{u}(f_1'(s))=\tilde{u}(f'(s))$ und

$\tilde{u}(g_1'(s))=\tilde{u}(g'(s))$ für alle $s\in S$.

Daher gilt $\phi'(\gamma;f,g)\in\mathcal{F}'\subset\tilde{\mathcal{F}}$.

Fall 3.3: $0<\alpha+\beta<2$. Sei $\gamma':=\gamma\alpha+(1-\gamma)\beta$ und

$h' := \tilde{\phi}'\left(\frac{\gamma\alpha}{\gamma'}; f', g'\right)$, $h'' := \tilde{\phi}'\left(\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\gamma'}; f'', g''\right)$.

Dann folgt aus den Fällen 3.2 und 3.1 $h' \in \mathcal{F}'$, $h'' \in \mathcal{F}''$.

Damit gilt für alle $s \in S$

$$\tilde{\phi}'(\gamma; f, g)(s) = \gamma\alpha f'(s) + \gamma(1-\alpha) f''(s) + (1-\gamma)\beta g'(s) + (1-\gamma)(1-\beta) g''(s)$$
$$= \gamma' h'(s) + (1-\gamma') h''(s),$$

und daher $\tilde{\phi}'(\gamma; f, g) = \gamma' h' + (1-\gamma') h'' \in \tilde{\mathcal{F}}$.

III. Behauptung 4: $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\phi}', \tilde{\prec}^*)$ erfüllt (AX1) bis (AX5).

Dabei ist $\tilde{\prec}^*$ auf $\tilde{\mathcal{F}}$ wieder im Sinne des Isomorphismus j aus Vorbemerkung (5.0) zu verstehen.

Beweis 4: zu (AX1): Zunächst ist $(\tilde{\mathcal{F}}^*, \tilde{\phi}^*, \tilde{\prec}^*)$ archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge, wie man analog zu dem Beweis für $(\tilde{X}, \tilde{\phi}, \tilde{\prec})$ zeigt.

Außerdem gilt

(i) $\gamma\varepsilon_f + (1-\gamma)\varepsilon_g \tilde{\sim}^* \varepsilon_{\gamma f + (1-\gamma) g}$.

In der Tat gilt mit $\gamma' := \gamma\alpha + (1-\gamma)\beta$:

$$\tilde{w}(\gamma f + (1-\gamma) g) = \tilde{w}(\gamma(\alpha f' + (1-\alpha) f'') + (1-\gamma)(\beta g' + (1-\beta) g''))$$
$$= \gamma' w'\left(\frac{\gamma\alpha}{\gamma'} f' + \frac{(1-\gamma)\beta}{\gamma'} g'\right) + (1-\gamma') w''\left(\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\gamma'} f'' + \frac{(1-\gamma)(1-\beta)}{1-\gamma'} g''\right)$$
$$= \gamma\alpha w'(f') + (1-\gamma)\beta w'(g') + \gamma(1-\alpha) w''(f'') + (1-\gamma)(1-\beta) w''(g'')$$
$$= \gamma\tilde{w}(f) + (1-\gamma)\tilde{w}(g).$$

Daraus folgt (i) nach Definition von $\tilde{\prec}^*$ auf $\tilde{\mathcal{F}}^*$.

Die Gültigkeit von (AX1) folgt nun analog wie die Gültigkeit von (AX1) für $(\mathcal{F}, \phi', \prec^*)$ im Beweis von Satz (6.1.a), wenn man dort (FA5) durch (i) ersetzt.

Bemerkung: Es gibt genau eine Nutzenfunktion auf $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\phi}', \tilde{\prec}^*)$, die Fortsetzung von w auf $(\mathcal{F}, \phi', \prec^*)$ ist. Sie stimmt auch mit $w'|_{\mathcal{F}'}$, $w''|_{\mathcal{F}''}$ und $\tilde{w}|_{\tilde{\mathcal{F}}}$ überein und wird daher im folgenden

ebenfalls mit $\tilde{w}$ bezeichnet.

zu (AX2): Setze $\overline{f}(s) :\equiv x_o$, $\hat{f}(s) :\equiv y_o$ mit x_o, y_o gemäß (NT).

Dann gilt $\overline{f}, \hat{f} \in \mathcal{F}$ und mit (FA4) folgt $\overline{f} \,\tilde{+}^{*}\, \hat{f}$.

zu (AX3): Sei $f,g \in \widetilde{\mathcal{F}}$, $f = \alpha f' + (1-\alpha) f''$, $g = \beta g' + (1-\beta) g''$ mit $f', g' \in \mathcal{F}'$, $f'', g'' \in \mathcal{F}''$.

Seien f'_-, f'_+, f''_-, f''_+ Abbildungen von S in $\tilde{X}$ derart, daß

$$\tilde{u}(f'_-(s)) = \begin{cases} 2\tilde{u}(f'(s)) & , \tilde{u}(f'(s)) < 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases},$$

$$\tilde{u}(f'_+(s)) = \begin{cases} 0 & , \tilde{u}(f'(s)) < 0 \\ 2\tilde{u}(f'(s)) & , \text{sonst} \end{cases},$$

$$\tilde{u}(f''_-(s)) = \begin{cases} 0 & , \tilde{u}(f''(s)) \leq 0 \\ 2\tilde{u}(f''(s)) & , \text{sonst} \end{cases},$$

$$\tilde{u}(f''_+(s)) = \begin{cases} 2\tilde{u}(f''(s)) & , \tilde{u}(f''(s)) \leq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

sowie $f'_-, f''_+ \in \mathcal{F}'$, $f'_+, f''_- \in \mathcal{F}''$. Letzteres ist wegen der Unbeschränktheit von $\tilde{u}$ und $\tilde{u}(f'_-(s)), \tilde{u}(f''_+(s)) \leq 0$ für alle $s \in S$ sowie $\tilde{u}(f'_+(s)), \tilde{u}(f''_-(s)) \geq 0$ für alle $s \in S$ stets möglich.

Dann ist für alle $s \in S$

$$f'(s) \sim \tfrac{1}{2} f'_-(s) + \tfrac{1}{2} f'_+(s)) \text{ und } f''(s) \sim \tfrac{1}{2} f''_+(s) + \tfrac{1}{2} f''_-(s).$$

Daraus folgt mit $f_- := \alpha f'_- + (1-\alpha) f''_+ \in \mathcal{F}'$, $f_+ := \alpha f'_+ + (1-\alpha) f''_- \in \mathcal{F}''$:

$$\text{(ii)} \quad f(s) \sim \left[\tfrac{1}{2}(\alpha f'_- + (1-\alpha) f''_+) + \tfrac{1}{2}(\alpha f'_+ + (1-\alpha) f''_-)\right](s)$$

$$\sim \tfrac{1}{2} f_-(s) + \tfrac{1}{2} f_+(s).$$

Weiter existieren $\tilde{f}' \in \mathcal{F}', \tilde{f}'' \in \mathcal{F}''$ mit

$$\tilde{u}(\tilde{f}'(s)) = \begin{cases} 2\tilde{u}(f_-(s)) & , \tilde{u}(f(s)) \geq \tilde{u}(g(s)) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases},$$

$$\tilde{u}(\tilde{f}''(s)) = \begin{cases} 2\tilde{u}(f_+(s)) & , \tilde{u}(f(s)) \geq \tilde{u}(g(s)) \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog erhält man $g_- \in \mathcal{F}'$, $g_+ \in \mathcal{F}''$ sowie $\tilde{g}' \in \mathcal{F}'$, $\tilde{g}'' \in \mathcal{F}''$ mit

$$\tilde{u}(\tilde{g}'(s)) = \begin{cases} 2\tilde{u}(g_-(s)) & , \tilde{u}(f(s)) < \tilde{u}(g(s)) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases},$$

$$\tilde{u}(\tilde{g}''(s)) = \begin{cases} 2\tilde{u}(g_+(s)) & , \tilde{u}(f(s)) < \tilde{u}(g(s)) \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze $k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\tilde{f}' + \frac{1}{2}\tilde{g}'\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\tilde{f}'' + \frac{1}{2}\tilde{g}''\right)$. Dann ist $k \in \tilde{\mathcal{F}}$ und es gilt

$$\tilde{u}(k(s)) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tilde{u}(f_-(s)) + \frac{1}{2}\tilde{u}(f_+(s)) & , \tilde{u}(f(s)) \geq \tilde{u}(g(s)) \\ \frac{1}{2}\tilde{u}(g_-(s)) + \frac{1}{2}\tilde{u}(g_+(s)) & , \tilde{u}(f(s)) < \tilde{u}(g(s)) \end{cases},$$

also wegen (ii) $k \in \text{Max}(f,g)$.

zu (AX4): Sei $g(s) \not\sim f(s)$ für alle $s \in S$, f_-, f_+, g_-, g_+ wie im Beweis zu (AX3).

Sei $\tilde{f}_-, \tilde{g}_+ \in \mathcal{F}'$, $\tilde{f}_+, \tilde{g}_- \in \mathcal{F}''$ so, daß für alle $s \in S$

$$\tilde{u}(\tilde{f}_-(s)) = 2\tilde{u}(f_-(s)),\ \tilde{u}(\tilde{f}_+(s)) = 2\tilde{u}(f_+(s)),$$

$$\tilde{u}(\tilde{g}_+(s)) = -2\tilde{u}(g_+(s)),\ \tilde{u}(\tilde{g}_-(s)) = -2\tilde{u}(g_-(s)).$$

Setze $\gamma := \frac{1}{2}$ und $k := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\tilde{f}_- + \frac{1}{2}\tilde{f}_+\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\tilde{g}_+ + \frac{1}{2}\tilde{g}_-\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\tilde{f}_- + \frac{1}{2}\tilde{g}_+\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\tilde{f}_+ + \frac{1}{2}\tilde{g}_-\right).$$

Dann ist $k \in \tilde{\mathcal{F}}$ sowie

$$\tilde{u}\left(\tfrac{1}{2}f(s) + \tfrac{1}{2}\bar{f}(s)\right) = \tfrac{1}{2}\tilde{u}(f(s)) = \tfrac{1}{2}\tilde{u}(g(s)) + \tfrac{1}{2}\left(\tilde{u}(f(s)) - \tilde{u}(g(s))\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\tilde{u}(g(s)) + \tfrac{1}{2}\tilde{u}(k(s)) = \tilde{u}\left(\tfrac{1}{2}g(s) + \tfrac{1}{2}k(s)\right) \text{ für alle } s \in S.$$

zu (AX5): Sei $f_n \in \tilde{\mathcal{F}}$, $v_n \in \mathbb{N}$ und $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ so, daß $\sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = 1$ oder $\sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = \infty$, $0 \leq v_n \tilde{u}(f_n(s)) \leq v_{n+1}\tilde{u}(f_{n+1}(s))$ für alle $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ und

(iii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n\tilde{u}(f_n(s)) = \tilde{u}(f(s))$ für alle $s\in S$.

Fall 1: $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = 1$.

Fall 1.1: $\tilde{w}(f) = 0$. Klar.

Fall 1.2: $\tilde{w}(f) > 0$. Wegen $\tilde{u}(f_n(s)) \geq 0$ für alle $s\in S$, $n\in\mathbb{N}$, $\tilde{u}(f(s)) \geq 0$ für alle $s\in S$ und der Unbeschränktheit von $\tilde{u}$ bzw. u nach unten existieren $f^-, f_n^- \in \mathcal{F}$ so, daß

$$\tilde{u}(f_n^-(s)) = -\tilde{u}(f_n(s)),\quad \tilde{u}(f^-(s)) = -\tilde{u}(f(s)).$$

$(f_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ ist punktweise monoton fallend und es gilt $f^-\in \mathrm{Inf}(f_n^-)$.

Sei ε mit $0 < \varepsilon < 1$ so klein, daß $(1-\varepsilon)w(f^-) + \varepsilon w(\hat{f}) =: d(\varepsilon) < 0$.

Für $n\in\mathbb{N}$ sei $f_n^\varepsilon \in \mathcal{F}$ definiert gemäß

$$f_n^\varepsilon(s) := \begin{cases} (1-\varepsilon)f_n^-(s) + \varepsilon x_o\,, & (1-\varepsilon)f^-(s) + \varepsilon y_o \mathrel{\tilde{\prec}} (1-\varepsilon)f_n^-(s) + \varepsilon x_o \\ (1-\varepsilon)f^-(s) + \varepsilon y_o\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung: a) f_n^ε ist von oben konvergent gegen $(1-\varepsilon)f^- + \varepsilon\hat{f}$.

b) $\inf_{n\in\mathbb{N}} w(f_n^\varepsilon) = (1-\varepsilon)w(f^-) + \varepsilon w(\hat{f})$.

Beweis: zu a): Für $n\in\mathbb{N}$ sei $A_n := \{s \mid f_n^\varepsilon(s) \neq (1-\varepsilon)f^-(s) + \varepsilon y_o\}$.

Da die Folge $(f_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton fällt, gilt $A_{n+1}\subset A_n$ und mit (FA3) folgt $f_{n+1}^\varepsilon \mathrel{\tilde{\prec}^*} f_n^\varepsilon$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Wegen (iii) existiert zu jedem $s\in S$ ein $n_o(s,\varepsilon)$ so, daß

$u(f(s)) - \tilde{u}(f_n(s)) \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\tilde{u}(y_o)$ für alle $n \geq n_o(s,\varepsilon)$. Also ist

$(1-\varepsilon)f_n^-(s) + \varepsilon x_o \mathrel{\tilde{\prec}} (1-\varepsilon)f^-(s) + \varepsilon y_o$ für alle $n \geq n_o(s,\varepsilon)$

und daher $f_n^\varepsilon(s) = (1-\varepsilon)f^-(s) + \varepsilon y_o$ für alle $n \geq n_o(s,\varepsilon)$.

Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Damit ist Behauptung a) bewiesen.

zu b): Wegen (FA3) ist $(1-\varepsilon)\underline{f} + \varepsilon\hat{f} \preccurlyeq^* f_n^\varepsilon$ für alle $n\in\mathbb{N}$

und daher $d(\varepsilon) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} w(f_n^\varepsilon)$.

Es bleibt zu zeigen, daß $\inf_{n\in\mathbb{N}} w(f_n^\varepsilon) \le d(\varepsilon)$.

Sei dazu $\gamma > 1$. Dann existiert ein $n_o \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\gamma w(f_{n_o}^\varepsilon) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} w(f_n^\varepsilon).$$

Wegen der Unbeschränktheit von u nach unten und wegen

$f_n^\varepsilon(s) \preccurlyeq x_o$ für alle $s\in S$ existiert zu $\gamma > 1$ und f_n^ε ein $f_{n,\gamma}^\varepsilon \in \mathcal{F}$

mit $u(f_{n,\gamma}^\varepsilon(s)) = \gamma u(f_n^\varepsilon(s))$.

Wegen (FA3) folgt daraus $w\left(\frac{1}{\gamma} f_{n,\gamma}^\varepsilon + \frac{\gamma-1}{\gamma}\overline{f}\right) = w(f_n^\varepsilon)$, also

(iv) $\quad w(f_{n,\gamma}^\varepsilon) = \gamma w(f_n^\varepsilon)$.

Damit gilt: zu $\gamma > 1$ existiert ein $n_o \in \mathbb{N}$ derart, daß

$w(f_{n_o,\gamma}^\varepsilon) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} w(f_n^\varepsilon)$, also $f_{n_o,\gamma}^\varepsilon \preccurlyeq^* f_n^\varepsilon$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

(FA6) liefert $f_{n_o,\gamma}^\varepsilon \preccurlyeq^* (1-\varepsilon)\underline{f} + \varepsilon\hat{f}$. Daraus folgt mit (iv)

$$\gamma \inf_{n\in\mathbb{N}} w(f_n^\varepsilon) \le \gamma w(f_{n_o}^\varepsilon) = w(f_{n_o,\gamma}^\varepsilon) \le d(\varepsilon).$$

Da $\gamma > 1$ beliebig war, liefert Grenzübergang $\gamma \to 1$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} w(f_n^\varepsilon) \le d(\varepsilon) \quad \text{und damit Behauptung b).}$$

Aus $(1-\varepsilon)\underline{f}(s) + \varepsilon\overline{f}(s) \preccurlyeq f_n^\varepsilon(s)$ für alle $s\in S$ folgt wegen (FA3)

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} w((1-\varepsilon)\underline{f} + \varepsilon\overline{f}) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} w(f_n^\varepsilon) = d(\varepsilon) = w((1-\varepsilon)\underline{f} + \varepsilon\hat{f}).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, liefert Grenzübergang $\varepsilon \to 0$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} w(\underline{f}_n) \le w(\underline{f}).$$

Zusammen mit $\inf_{n\in\mathbb{N}} w(\underline{f}_n) \ge w(\underline{f})$ folgt daraus $\inf_{n\in\mathbb{N}} w(\underline{f}_n) = w(\underline{f})$.

Mit $w(\underline{f}) = -\tilde{w}(f)$ und $w(\underline{f}_n) = -\tilde{w}(f_n)$ folgt

$$\tilde{w}(f) = -\inf_{n\in\mathbb{N}} (-\tilde{w}(f_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{w}(f_n).$$

Fall 2: $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = \infty$.

Sei $n\in\mathbb{N}$ fest. Dann gilt wegen $v_n\tilde{u}(f_n(s)) \geq 0$ für alle $s\in S$

und nach Definition von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}''$:

Es existiert ein $f_n'\in\mathcal{F}''\subset\tilde{\mathcal{F}}$ mit

$\tilde{u}(f_n'(s)) = v_n\tilde{u}(f_n(s))$ für alle $s\in S$. Daraus folgt

$$\tilde{u}(f_n(s)) = \tilde{u}\left(\frac{1}{v_n} f_n'(s) + \frac{v_n-1}{v_n} \bar{f}(s)\right) \text{ für alle } s\in S.$$

Nach Definition von $\tilde{w}$ auf $\tilde{\mathcal{F}}$ gilt

$$\tilde{w}(f_n) = \tilde{w}\left(\phi'\left(\frac{1}{v_n}; f_n', \bar{f}\right)\right) = \frac{1}{v_n}\tilde{w}(f_n') \text{ und damit}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{w}(f_n') = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n\tilde{w}(f_n).$$

Nun gilt aber $f_n'\in\tilde{\mathcal{F}}_o := \{f \mid f\in\tilde{\mathcal{F}},\ x_o \precsim f(s) \text{ für alle } s\in S\}$,

$\tilde{u}(f_n'(s)) \leq \tilde{u}(f_{n+1}'(s))$ für alle $s\in S$, $n\in\mathbb{N}$ sowie

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{u}(f(s)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{u}(f_n'(s)) \quad \text{für alle } s\in S.$$

Aus Fall 1 folgt daher $\tilde{w}(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{w}(f_n')$.

Somit gilt $\tilde{w}(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n\tilde{w}(f_n)$, was zu zeigen war.

Damit ist Satz (6.1.b) bewiesen.

6.2 Die Axiomensysteme (FN) und (AX)

Wir untersuchen den Fall, für den Ferguson selbst neben der Existenz auch die Eindeutigkeit der subjektiven Vorbewertung erhält, also den Fall, daß die subjektive Präferenzrelation $\precsim$ auf X nicht trivial ist.

(6.2) Satz:

Es gelten die Voraussetzungen und Festlegungen der von Ferguson [4] untersuchten Problemstellung einschließlich (FN1).

Dann ist $(S,(X,\phi,\preceq),(\mathcal{F},\phi',\preceq^*))$ eine Vorbewertungs-Struktur, wenn $\phi':[0,1]\times\mathcal{F}^2\to\mathcal{F}$ definiert wird gemäß

$\phi'(\alpha;f,g)(s) := \phi(\alpha;f(s),g(s))$ für alle $s\in S$.

Beweis: Zum Beweis verwenden wir die Bezeichnungen von §5.2.

zu (AX1): Analog zum Beweis von (AX1) im Beweis von Satz (6.1.a) mit (FN5) anstelle von (FA5).

zu (AX2): Da $\mathcal{F}$ alle Abbildungen von S in X enthält, ist $\overline{f}\in\mathcal{F}$ und $\hat{f}\in\mathcal{F}$, wenn man mit $x',x''\in X$ gemäß (FN1) definiert $\overline{f}(s) :\equiv x'$, $\hat{f}(s) :\equiv x''$. Aus (FN6) folgt $\overline{f} \nsim^* \hat{f}$.

zu (AX3): Klar.

zu (AX4): Sei $f:=[y_1,\ldots,y_n]$, $g:=[x_1,\ldots,x_n]$ mit $x_i \prec y_i$ für $i=1,\ldots,n$, und sei u Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\preceq)$ mit $u(x')=0$.

Setze $b := \sup_{x\in X} u(x)$. Dann ist $b>0$ wegen $u(x'')>0$.

Fall 1: $b<\infty$.

Dann existiert ein $\nu\in\mathbb{N}$ so, daß

$$\max_{1\le i\le n}(u(y_i)-u(x_i)) = u(y_{i_o})-u(x_{i_o}) < \nu b.$$

Setze $\gamma := \frac{1}{\nu+1}$. Dann ist $\gamma\in(0,1)$ und es gilt

$$0 \le t_i := \frac{\gamma}{1-\gamma}(u(y_i)-u(x_i)) < b \quad \text{für } i=1,\ldots,n.$$

Wähle $z_i\in X$ so, daß $u(z_i)=t_i$ $(i=1,\ldots,n)$ und setze $k:=[z_1,\ldots,z_n]$. Dann ist $k\in\mathcal{F}$ und es gilt für $i=1,\ldots,n$

$u(\gamma y_i+(1-\gamma)x') = \gamma u(y_i) = u((1-\gamma)z_i+\gamma x_i)$, also

$$\gamma f(s_i)+(1-\gamma)\bar{f}(s_i) \sim (1-\gamma)k(s_i)+\gamma g(s_i).$$

Fall 2: $b = \infty$.

Setze $\gamma := \frac{1}{2}$. Dann gilt für $i=1,\ldots,n$

$0 \le t_i := \frac{\gamma}{1-\gamma}(u(y_i)- u(x_i)) < \infty$. Wähle $z_i \in X$ so, daß $u(z_i)= t_i$ $(i=1,\ldots,n)$ und setze $k:=[z_1,\ldots,z_n]$.

Dann ist $k \in \mathcal{F}$ und es gilt für $i=1,\ldots,n$

$$\gamma f(s_i)+(1-\gamma)\bar{f}(s_i) \sim (1-\gamma)k(s_i)+\gamma g(s_i).$$

zu (AX5): Sei w Nutzenfunktion auf $(\mathcal{F},\phi',\prec^*)$ mit $w(\bar{f})= 0$.

Sei $f_m \in \mathcal{F}$ und $v_m \in \mathbb{N}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ so, daß $\sup_{m\in\mathbb{N}} v_m = 1$ oder $\sup_{m\in\mathbb{N}} v_m = \infty$ sowie $v_m u(f_m(s)) \le v_{m+1} u(f_{m+1}(s))$ für alle $s \in S$, $m \in \mathbb{N}$.

Ferner existiere $f \in \mathcal{F}$ so, daß

$$u(f(s))= \sup_{m\in\mathbb{N}} v_m u(f_m(s)) \quad \text{für alle } s \in S.$$

Behauptung: Es gilt $w(f)= \sup_{m\in\mathbb{N}} v_m w(f_m)$.

Beweis: Fall 1: $\sup_{m\in\mathbb{N}} v_m = 1$.

Dann ist $v_m = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Aus $u(f(s)) \ge u(f_m(s))$ für alle $s \in S$, $m \in \mathbb{N}$ folgt wegen (FN4)

(i) $w(f) \ge \sup_{m\in\mathbb{N}} w(f_m)$.

Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $0 < \gamma < 1$. Dann gilt wegen

$$u(f(s))= \sup_{m\in\mathbb{N}} u(f_m(s)) \quad \text{für alle } s \in S:$$

Zu jedem $s \in S$ existiert ein $m(s) \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\gamma u(f(s)) \le u(f_m(s)) \quad \text{für alle } m \ge m(s).$$

Setze $m_o := \max_{s\in S} m(s)$. Dann gilt für alle $s \in S$, $m \ge m_o$

$$u(\gamma f(s)+(1-\gamma)\bar{f}(s)) = \gamma u(f(s)) \leq u(f_m(s)).$$

Daraus folgt wegen (FN4)

$$w(\gamma f +(1-\gamma)\bar{f}) = \gamma w(f) \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} w(f_m).$$

Grenzübergang $\gamma \to 1$ liefert $w(f) \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} w(f_m)$.

Daraus folgt zusammen mit (i) die Behauptung.

Fall 2: $\sup_{m\in\mathbb{N}} v_m = \infty$.

Definiere für $m\in\mathbb{N}$ $g_m \in \mathcal{F}$ so, daß $u(g_m(s)) = v_m u(f_m(s))$ für alle $s\in S$. (Wegen $v_m u(f_m(s)) \leq u(f(s))$ für alle $s\in S$, $m\in\mathbb{N}$ ist dies stets möglich.)

Dann erfüllt die Folge $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen von Fall 1.

Daher gilt

(ii) $w(f) = \sup_{m\in\mathbb{N}} w(g_m)$.

Wegen $u(f_m(s)) = \frac{1}{v_m} u(g_m(s)) = u\left(\phi\left(\frac{1}{v_m}; g_m(s), \bar{f}(s)\right)\right)$ für alle $s\in S$, $m\in\mathbb{N}$ gilt $w(f_m) = w\left(\phi'\left(\frac{1}{v_m}; g_m, \bar{f}\right)\right) = \frac{1}{v_m} w(g_m)$. Daraus folgt

$\sup_{m\in\mathbb{N}} v_m w(f_m) = \sup_{m\in\mathbb{N}} w(g_m)$ und zusammen mit (ii)

$w(f) = \sup_{m\in\mathbb{N}} v_m w(f_m)$, was zu zeigen war.

6.3 Die Axiomensysteme (AN) und (AX)

(6.3) Satz:

Es gelten die Voraussetzungen und Festlegungen der von Anscombe und Aumann [1] untersuchten Problemstellung.

Ferner sei $Y := C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, wobei für $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ $C_n :=$ $\{y \mid y$ einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung über $C \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k\}$.

Erweitere $\preceq$ auf $C \cup C_1 \cup C_2$ zu $\preceq$ auf Y gemäß Satz (3.6) und definiere $\phi : [0,1] \times Y^2 \to Y$ gemäß $\phi(\alpha; x, y) := (\alpha x, (1-\alpha) y)$.

Erweitere $\preceq^*$ auf $\mathcal{F}$ zu $\preceq^*$ auf $\mathcal{G} := \{g \mid g : S \to Y\}$ gemäß

$g_1 \preceq^* g_2$ genau dann, wenn $f_1 \preceq^* f_2$ mit $f_i \in \mathcal{F}$, $f_i(s) \sim g_i(s)$ für alle $s \in S$ $(i=1,2)$, und definiere

$\phi^* : [0,1] \times \mathcal{G}^2 \to \mathcal{G}$ gemäß $\phi^*(\alpha; f, g)(s) := \phi(\alpha; f(s), g(s))$ für alle $s \in S$.

Dann gilt:

$(S, (Y, \phi, \preceq), (\mathcal{G}, \phi^*, \preceq^*))$ ist eine Vorbewertungs-Struktur.

Beweis: Zum Beweis verwenden wir die Bezeichnungen von §5.1.

Zunächst ist $(Y, \phi, \preceq)$ archimedisch schwachgeordnete gemischte Menge wegen Satz (3.6). Wegen (AN4) ist $\preceq^*$ auf $\mathcal{G}$ wohldefiniert. Es bleibt noch die Gültigkeit von (AX1) bis (AX5) zu zeigen.

zu (AX1): zu (A1): $\preceq^*$ ist eine lineare Ordnung auf $\mathcal{G}$, weil $\preceq^*$ eine lineare Ordnung auf $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*$ ist (wegen (AN3)) und zu jedem $g \in \mathcal{G}$ ein $f \in \mathcal{F}$ existiert mit $f(s) \sim g(s)$ für alle $s \in S$.

zu (A2): Seien $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$ mit $g_1 \preceq^* g_2$, und $f_i \in \mathcal{F}$ so, daß $f_i(s) \in C \cup C_1$ und $f_i(s) \sim g_i(s)$ für alle $s \in S$ $(i=1,2,3)$.

Dann ist $f_1 \prec^* f_2$ und wegen (AN3) und Satz (3.5) existiert eine Funktion w von $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}^*$ in $\mathbb{R}$ mit $w(f_1) < w(f_2)$.

Dann ist für $\alpha \in (0,1]$ $\alpha w(f_1)+(1-\alpha)w(f_3) < \alpha w(f_2)+(1-\alpha)w(f_3)$ und daher wegen Satz (3.5) $(\alpha f_1,(1-\alpha)f_3) \prec^* (\alpha f_2,(1-\alpha)f_3)$.

Wegen (AN5) folgt $\phi^*(\alpha;f_1,f_3) \prec^* \phi^*(\alpha;f_2,f_3)$.

Wegen Satz (3.6) gilt für i=1,2 und alle $s \in S$

$$\phi^*(\alpha;g_i,g_3)(s)=(\alpha g_i(s),(1-\alpha)g_3(s)) \sim$$

$$\sim (\alpha f_i(s),(1-\alpha)f_3(s))= \phi^*(\alpha;f_i,f_3)(s) \in C \cup C_1 \cup C_2.$$

Zusammen mit der Definition von $\prec^*$ auf $\mathcal{G}$ folgt

$$\phi^*(\alpha;g_1,g_3) \prec^* \phi^*(\alpha;g_2,g_3).$$

zu (A3): Seien $g_1,g_2,g_3 \in \mathcal{G}$ mit $g_1 \prec^* g_2 \prec^* g_3$ und $f_i \in \mathcal{F}$ mit $f_i(s) \in C \cup C_1$ und $f_i(s) \sim g_i(s)$ für alle $s \in S$ $(i=1,2,3)$.

Wiederum mit $w: \mathcal{F} \cup \mathcal{F}^* \to \mathbb{R}$ gemäß Satz (3.5) ist $w(f_1) < w(f_2) < w(f_3)$ und wegen des Archimedischen Axioms in $\mathbb{R}$ existieren $\alpha,\beta \in (0,1)$ so, daß $\alpha w(f_1)+(1-\alpha)w(f_3) < w(f_2) < \beta w(f_1)+(1-\beta)w(f_3)$.

Mit Hilfe von (AN5) und Satz (3.6) folgt wie im Beweis zu (A2)

$$\phi^*(\alpha;g_1,g_3) \prec^* g_2 \prec^* \phi^*(\beta;g_1,g_3).$$

Nach Definition von $\precsim^*$ auf $\mathcal{G}$ läßt sich (AN4) verallgemeinern zu

(AN4') Wenn $x_i \precsim x_i'$, dann $[x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n] \precsim^* [x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_n]$

für $x_i',x_k \in Y$, $k=1,\ldots,n$.

Sei $f,g \in \mathcal{G}$.

zu (G1): Aus $\phi^*(1;f,g)(s)= \phi(1;f(s),g(s)) \sim f(s)$ für alle $s \in S$ folgt mit (AN4') $\phi^*(1;f,g) \sim^* f$.

zu (G2): Aus $\phi^*(\alpha;f,g)(s)= \phi(\alpha;f(s),g(s)) \sim$

$$\sim \phi(1-\alpha;g(s),f(s))= \phi^*(1-\alpha;g,f)(s)$$

für alle $s \in S$ folgt mit (AN4') $\phi^*(\alpha;f,g) \sim^* \phi^*(1-\alpha;g,f)$.

zu (G3): Aus $\phi^*(\alpha;\phi^*(\beta;f,g),g)(s) = \phi(\alpha;\phi(\beta;f(s),g(s)),g(s)) \sim$
$\sim \phi(\alpha\beta;f(s),g(s)) = \phi^*(\alpha\beta;f,g)(s)$ für alle $s \in S$ folgt
$\phi^*(\alpha;\phi^*(\beta;f,g),g) \sim^* \phi^*(\alpha\beta;f,g)$.

Damit ist die Gültigkeit von (AX1) gezeigt.

zu (AX2): Setze $\overline{f}(s) :\equiv c'$, $\hat{f}(s) :\equiv c''$. Dann gilt $\overline{f}, \hat{f} \in \mathcal{F}$ und wegen (AN6) $\overline{f} \prec^* \hat{f}$.

zu (AX3): Zu $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ existiert $f \in \mathcal{F} \cap \mathrm{Max}(g_1, g_2)$, da
$\mathcal{F} := \{f \mid f: S \to C \cup C_1 \cup C_2\}$.

zu (AX4): Der Beweis verläuft analog zum Beweis von (AX4) im Beweis von Satz (6.2) im Fall $b < \infty$, wobei $b = u(c'')$. Man ersetze nur $\mathcal{F}$ durch $\mathcal{G}$, X durch Y.

zu (AX5): Sei w Nutzenfunktion auf $(\mathcal{G}, \phi^*, \prec^*)$ mit $w(\overline{f}) = 0$. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von (AX5) im Beweis von Satz (6.2), wenn man nur (FN4) durch (AN4') ersetzt.

6.4 Die Axiomensysteme (FIS) und (AX)

(6.4) Satz:

Es gelten die Voraussetzungen und Festlegungen der von Fishburn [11] untersuchten Problemstellung.

Dann gilt:

$(S,(X,\phi,\prec),(\mathcal{F},\phi^*,\prec^*))$ ist eine Vorbewertungs-Struktur.

Beweis: Zum Beweis verwenden wir die Bezeichnungen von §5.4.

Zunächst ist (X,ϕ) Mischungsmenge nach Voraussetzung. Aus der Definition von $\prec$ auf X und aus (FIS1) folgt unmittelbar, daß $(X,\phi,\prec)$ eine archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge ist.

Es bleibt zu zeigen, daß $(\mathcal{F},\phi^*,\preccurlyeq^*)$ (AX1) bis (AX5) erfüllt.

zu (AX1): Gilt wegen (FIS1).

zu (AX2): Setze $\bar{f}(s) :\equiv x_o$, $\hat{f}(s) :\equiv y_o$ für alle $s\in S$, wobei x_o und y_o gemäß (FIS2). Dann ist $\bar{f},\hat{f}\in\mathcal{F}$ und aus der Definition von $\preccurlyeq$ auf X folgt $\bar{f} \preccurlyeq^* \hat{f}$.

zu (AX3): Klar.

zu (AX4): Sei $f,g\in\mathcal{F}$ mit $g(s) \preccurlyeq f(s)$ für alle $s\in S$.

Sei $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m\in\mathfrak{A}$ so, daß $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$, $\bigcup_{j=1}^{m} B_j = S$,

$f(s) \equiv x_i$ auf A_i $(i=1,\ldots,n)$ und $g(s) \equiv y_j$ auf B_j $(j=1,\ldots,m)$.

Sei ferner u Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\preccurlyeq)$ mit $u(x_o) = 0$.

Fall 1: $\max\limits_{i,j} (u(x_i) - u(y_j)) \geq \sup\limits_{x\in X} u(x)$.

Da es mindestens ein $x\in X$ gibt mit $u(x) > 0$ (wegen $u(y_o) > 0$), existieren $\bar{x}\in X$ und $c > 1$ so, daß $\max\limits_{i,j} (u(x_i) - u(y_j)) = cu(\bar{x})$.

Wähle $\gamma := \frac{1}{c+1}$. Dann ist $\gamma\in(0,1)$ und es gilt für alle

$(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}$ mit $C_{i,j} := A_i\cap B_j \neq \emptyset$

$$0 \leq u_{i,j} := \frac{\gamma}{1-\gamma}(u(x_i) - u(y_j)) \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} \max_{i,j} (u(x_i) - u(y_j)) = u(\bar{x}) \leq \sup_{x\in X} u(x).$$

Fall 2: $\max\limits_{i,j} (u(x_i) - u(y_j)) < \sup\limits_{x\in X} u(x)$.

Wähle $\gamma\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ beliebig. Dann gilt für alle

$(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}$ mit $C_{i,j} \neq \emptyset$

$$0 \leq u_{i,j} := \frac{\gamma}{1-\gamma}(u(x_i) - u(y_j)) \leq \max_{i,j} (u(x_i) - u(y_j)) < \sup_{x\in X} u(x).$$

Sei nun $\mathcal{A} := \{C_{i,j} \mid C_{i,j} \neq \emptyset\}$. Wähle in beiden Fällen zu $C_{i,j}\in\mathcal{A}$

$z_{ij} \in X$ so, daß $u(z_{ij}) = u_{i,j}$, und setze $k(s) :\equiv z_{ij}$ für $s \in C_{i,j}$.

Dann ist $k \in \mathcal{F}$, da $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$, und es gilt für $s \in C_{i,j} \neq \emptyset$

$$u(\phi(\gamma; f(s), \overline{f}(s))) = \gamma u(x_i) = \gamma u(y_j) + (1-\gamma) u(z_{ij}) =$$

$$= u(\phi(\gamma; g(s), k(s))). \text{ Daraus folgt}$$

$$\phi(\gamma; f(s), \overline{f}(s)) \sim \phi(\gamma; g(s), k(s)) \text{ für alle } s \in S.$$

zu (AX5): Wir führen den Beweis von (AX5) in 6 Schritten.

Sei u Nutzenfunktion auf $(X, \phi, \preccurlyeq)$ mit $u(x_o) = 0$, $u(y_o) = 2$.

Dann ist $u(z_o) = 1$ für $z_o := \phi\left(\frac{1}{2}; x_o, y_o\right)$.

Sei ferner w Nutzenfunktion auf $(\mathcal{F}, \phi^*, \preccurlyeq^*)$ mit $w(\overline{f}) = 0$

(Existiert wegen (FIS1)).

I. Behauptung 1: Sei $C \in \mathcal{R}$ und $n_1(s) \equiv h_2(s)$ für $s \in \overline{C}$ sowie

$h_1(s) \equiv x$, $h_2(s) \equiv y$ für $s \in C$ mit $x \prec y$. Dann gilt $h_1 \preccurlyeq^* h_2$.

Beweis 1: Fall 1: $C \in \mathcal{N}$. Dann ist nach Definition von $\mathcal{N}$

$h_1 \sim^* h_2$, also insbesondere $h_1 \preccurlyeq^* h_2$.

Fall 2: $C \in \mathcal{R}-\mathcal{N}$. Dann folgt aus (FIS3) $h_1 \preccurlyeq^* h_2$.

II. Behauptung 2: Sei $f, g \in \mathcal{F}$ mit $g(s) \preccurlyeq f(s)$ für alle $s \in S$.

Dann ist $g \preccurlyeq^* f$.

Beweis 2: Sei f,g wie im Beweis zu (AX4).

Dann ist $y_j \prec x_i$ falls $C_{i,j} := A_i \cap B_j \neq \emptyset$ $(i=1,..,n,\ j=1,...,m)$.

Definiere $f_{i,j} \in \mathcal{F}$ für $(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,m\}$ gemäß

$$f_{i,j}(s) := \begin{cases} y_\nu & , s \in C_{\mu,\nu},\ \mu < i \\ y_\nu & , s \in C_{i,\nu},\ \nu \leq j \\ f(s) & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist, falls $C_{1,1} \neq \emptyset$,

$$f_{1,1}(s) = y_1 \preccurlyeq x_1 = f(s) \text{ für } s \in C_{1,1} \text{ und } f_{1,1}(s) = f(s) \text{ für } s \in \overline{C_{1,1}}.$$

Für $i \leq n$, $j \leq m-1$ gilt, falls $C_{i,j+1} \neq \emptyset$,

$f_{i,j+1}(s) = y_{j+1} \curlywedge x_i = f_{i,j}(s)$ für $s \in C_{i,j+1}$ und

$f_{i,j+1}(s) = f_{i,j}(s)$ für $s \in \overline{C_{i,j+1}}$.

Für $1 \leq i \leq n-1$ gilt, falls $C_{i+1,1} \neq \emptyset$,

$f_{i+1,1}(s) = y_1 \curlywedge x_{i+1} = f_{i,m}(s)$ für $s \in C_{i+1,1}$ und

$f_{i+1,1}(s) = f_{i,m}(s)$ für $s \in \overline{C_{i+1,1}}$.

Mit Behauptung 1 folgt $f_{i+1,1} \curlywedge^* f_{i,m}$ für $i < n$ und

$f_{i,j+1} \curlywedge^* f_{i,j}$ für $i \leq n$, $j \leq m-1$.

Daraus folgt wegen der Transitivität von $\curlywedge^*$ und $f_{n,m} = g$ Behauptung 2.

III. Behauptung 3: Für $A \in \mathfrak{A}$ sei $f_A(s) := \begin{cases} z_o & , s \in A \\ x_o & , s \in \overline{A}. \end{cases}$

a) Für $A,B \in \mathfrak{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ ist $w(f_{A \cup B}) = w(f_A) + w(f_B)$.

b) Für $A,B \in \mathfrak{A}$ mit $B \subset A$ ist $w(f_{A-B}) = w(f_A) - w(f_B)$.

Beweis 3:

Sei $f(s) := \begin{cases} x & , s \in C \\ x_o & , s \in \overline{C} \end{cases}$, mit $x \in X$, $C \in \mathfrak{A}$.

Dann ist $f \in \mathcal{F}$ und es existiert $k \in \mathbb{R}^+$ derart, daß

$u(f(s)) = ku(f_C(s))$ für alle $s \in S$.

Falls $k \leq 1$ gilt $w(f) = kw(f_C)$.

Falls $k > 1$ gilt $w(f_C) = \frac{1}{k} w(f) + \frac{k-1}{k} w(\overline{f})$, also insgesamt

(i) $w(f) = kw(f_C)$.

Sei nun $A,B \in \mathfrak{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$.

Sei $g_1(s) := \begin{cases} y_o & , s \in A \\ x_o & , s \in \overline{A} \end{cases}$, $g_2(s) := \begin{cases} y_o & , s \in B \\ x_o & , s \in \overline{B}. \end{cases}$

Dann ist $f_{A\cup B}(s) \sim \phi\left(\frac{1}{2}; g_1(s), g_2(s)\right)$ für alle $s\in S$, also wegen Behauptung 2 und (i)

$$w(f_{A\cup B}) = w\left(\phi^*\left(\tfrac{1}{2}; g_1, g_2\right)\right) = w(f_A) + w(f_B).$$

Damit ist Behauptung a) gezeigt.

Für $B\subset A$ ist $(A-B)\cap B = \emptyset$. Daher folgt aus a)

$$w(f_A) = w(f_{A-B}) + w(f_B) \text{ und damit b).}$$

IV. Behauptung 4: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und sei $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Dann gilt $w(f_A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} w(f_{A_n})$.

Beweis 4: Wegen (FIS3) ist für alle $n\in\mathbb{N}$

(ii) $f_{A_n} \preceq^* f_{A_{n+1}} \preceq^* f_A$, also

$$w(f_{A_n}) \le w(f_{A_{n+1}}) \quad \text{sowie} \quad w(f_A) \ge \sup_{n\in\mathbb{N}} w(f_{A_n}).$$

Fall 1: Es existiert ein $n_o\in\mathbb{N}$ so, daß $f_{A_n - A_{n-1}} \sim^* f_\emptyset$ für alle $n \ge n_o$. Dann gilt wegen Behauptung 3b) für alle $m \ge n_o$

$$w(f_{A_m}) = w(f_{A_{n_o}}), \text{ also insbesondere } f_{A_m} \preceq^* f_{A_{n_o}}.$$

Daraus folgt mit (FIS4) $f_A \preceq^* f_{A_{n_o}}$.

Zusammen mit (ii) gilt $f_A \sim^* f_{A_{n_o}}$.

Daraus folgt wegen $\sup_{n\in\mathbb{N}} w(f_{A_n}) = w(f_{A_{n_o}})$ die Behauptung.

Fall 2: $f_\emptyset \prec^* f_{A_n - A_{n-1}}$ für unendlich viele n.

Annahme: $w(f_A) > \sup_{n\in\mathbb{N}} w(f_{A_n})$.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $w(f_A) - \varepsilon \geq w(f_{A_n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da für $n,m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt $(A_n - A_{n-1}) \cap (A_m - A_{m-1}) = \emptyset$, existiert ein $m_o \in \mathbb{N}$ derart, daß $0 < w(f_{A_{m_o} - f_{A_{m_o-1}}}) \leq \varepsilon$.

Wegen Behauptung 3b) gilt

$$w(f_A) - \varepsilon \leq w(f_{A-(A_{m_o}-A_{m_o-1})}) \leq w(f_A) \text{ und mit der Annahme folgt}$$

$$w(f_{A_n}) \leq w(f_{A-(A_{m_o}-A_{m_o-1})}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit (FIS4) folgt daraus

$$w(f_A) \leq w(f_{A-(A_{m_o}-A_{m_o-1})}), \text{ also } w(f_{A_{m_o}-A_{m_o-1}}) = 0 \text{ im Widerspruch zur Wahl von } m_o.$$

Damit ist Behauptung 4 bewiesen.

V. Behauptung 5: Sei $A_1,\ldots,A_n \in \mathfrak{A}$ und $g \in \mathfrak{F}$ gemäß $g(s) := y_i$ für $s \in A_i$, $x_o \preccurlyeq y_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Dann gilt:

$$w(g) = \sum_{i=1}^{n} u(y_i) w(f_{A_i}).$$

Beweis 5: Wegen Behauptung 2 und Behauptung 3a) kann o.B.d.A. angenommen werden, daß $u(y_i) > 0$ für $i > 1$.

Fall 1: $t := \sum_{i=1}^{n} u(y_i) \leq 1$. Setze $u(y_i) := r_i$ $(i=1,\ldots,n)$.

Dann ist für alle $s \in S$

$$u(g(s)) = t \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{t} 1_{A_i}(s) + (1-t)u(x_o)$$

$$= t \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{t} u(f_{A_i}(s)) + (1-t)u(x_o)$$

$$= t \cdot u\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{t} f_{A_i}\Big)(s)\Big) + (1-t)u(x_o).$$

Daraus folgt mit $q_j := \frac{\sum_{i=1}^{j} r_i}{\sum_{i=1}^{j+1} r_i}$ für alle $s \in S$

$$g(s) \sim \phi^*(t;\phi^*(q_{n-1};\phi^*(q_{n-2};\ldots\phi^*(q_1;f_{A_1},f_{A_2}),\ldots,f_{A_{n-1}}),f_{A_n}),\overline{f})(s)$$

und wegen Behauptung 2 gilt

$$w(g) = w\Big(t \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{t} f_{A_i} + (1-t)\overline{f}\Big) = \sum_{i=1}^{n} u(y_i) w(f_{A_i}).$$

Fall 2: $t := \sum_{i=1}^{n} r_i > 1$. Dann ist für alle $s \in S$

$$u\Big(\frac{1}{t}\, g(s) + \frac{t-1}{t}\, \overline{f}(s)\Big) = u\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{t} f_{A_i}\Big)(s)\Big), \text{ also}$$

$$\phi^*\Big(\frac{1}{t};g,\overline{f}\Big)(s) \sim \phi^*(q_{n-1};\phi^*(q_{n-2};\ldots\phi^*(q_1;f_{A_1},f_{A_2}),\ldots,f_{A_{n-1}}),f_{A_n})(s).$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{t}\, w(g) = w\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{t} f_{A_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{t} w(f_{A_i}) \quad \text{und damit}$$

$$w(g) = \sum_{i=1}^{n} u(y_i) w(f_{A_i}).$$

VI. Behauptung 6: Sei $f_n \in \mathcal{F}_o := \{f \mid f \in \mathcal{F},\ x_o \preccurlyeq f(s) \text{ für alle } s \in S\}$

und $v_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so, daß $\sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = 1$ oder $\sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = \infty$,

sowie $v_n u(f_n(s)) \leq v_{n+1} u(f_{n+1}(s))$ für alle $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$

und es existiere $f \in \mathcal{F}$ mit $u(f(s)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n u(f_n(s))$ für alle $s \in S$.

Dann gilt $w(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n w(f_n)$ für jede Nutzenfunktion w auf

$(\mathcal{F}, \phi^*, \preccurlyeq^*)$ mit $w(\overline{f}) = 0$.

Beweis 6: Seien $C_1, \ldots, C_m \in \mathfrak{A}$ und $C_1^n, \ldots, C_{j_n}^n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ so, daß

$\sum_{i=1}^{m} C_i = S$, $\sum_{j=1}^{j_n} C_j^n = S$, $f(s) \equiv x_i$ für $s \in C_i$ $(i=1,\ldots,m)$ und

$f_n(s) \equiv x_j^n$ für $s \in C_j^n$ $(j=1,\ldots,j_n)$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < 1$ und sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$B_n := \{s \mid v_n u(f_n(s)) \geq u(\phi(a; f(s), x_o)) = au(f(s))\}$.

Es gilt $B_n \in \mathfrak{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; denn für $C_{i,j}^n := C_i \cap C_j^n$ $(i=1,\ldots,m,$

$j=1,\ldots,j_n)$ und $T(n) := \{(i,j) \mid v_n u(x_j^n) \geq au(x_i)\}$ ist $C_{i,j}^n \in \mathfrak{A}$,

$T(n)$ endlich sowie $B_n = \bigcup_{T(n)} C_{i,j}^n$.

Definiere für $n \in \mathbb{N}$ $k_n \in \mathcal{F}$ gemäß

$k_n(s) := \phi(a 1_{B_n}(s); f(s), x_o)$. Dann gilt

$u \circ k_n = au \cdot f \cdot 1_{B_n}$ und aus der Definition von B_n folgt

$v_n u(f_n(s)) \geq u(k_n(s))$ für alle $s \in S$.

Wegen Behauptung 2 und $0 < \frac{1}{v_n} \leq 1$ gilt

(iii) $w(f_n) \geq w\left(\phi^*\left(\frac{1}{v_n}; k_n, \overline{f}\right)\right) = \frac{1}{v_n} w(k_n)$.

Wegen $v_n u(f_n(s)) \leq v_{n+1} u(f_{n+1}(s))$ für alle $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ und wegen

$au(f(s)) < \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n u(f_n(s))$ für alle $s \in S$

gilt $B_n \subset B_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = S$.

Damit gilt auch für jedes i mit $1 \leq i \leq m$

$C_i \cap B_n \subset C_i \cap B_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (C_i \cap B_m) = C_i$.

Mit Behauptung 4 folgt für jedes i

$w(f_{C_i}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} w(f_{C_i \cap B_n})$. Wegen Behauptung 5 gilt

$w(f) = \sum_{i=1}^{m} u(x_i) w(f_{C_i}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m} u(x_i) w(f_{C_i \cap B_n}) =$

$$= \frac{1}{a} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} au(x_i)w(f_{C_i\cap B_n}) + u(x_o)w(f_{\overline{B_n}}) \right\}$$

$$= \frac{1}{a} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} u(\phi(a;x_i,x_o))w(f_{C_i\cap B_n}) + u(x_o)w(f_{\overline{B_n}}) \right\}$$

$$= \frac{1}{a} \sup_{n\in\mathbb{N}} w(k_n).$$

Mit (iii) folgt weiter

$\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n w(f_n) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} w(k_n) = aw(f)$ und Grenzübergang $a \to 1$ liefert

$\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n w(f_n) \geq w(f)$. Dies liefert zusammen mit

$\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n w(f_n) \leq w(f)$ die Behauptung.

Damit ist Satz (6.4) bewiesen.

6.5 Die Axiomensysteme (FI) und (AX)

(6.5) Satz:

Es gelten die Voraussetzungen und Festlegungen der von Fishburn [8] bearbeiteten Problemstellung.

Dann gilt:

$(S,(X,\phi,\prec),(\mathcal{F},\phi^*,\prec^*))$ ist eine Vorbewertungs-Struktur.

Beweis: Zum Beweis verwenden wir die Bezeichnungen von §5.3.

$(X,\phi,\prec)$ ist archimedisch schwachgeordnete Mischungsmenge, wie sofort aus (FI1) und der Definition von $\prec$ folgt.

zu (AX1): Klar wegen (FI1).

zu (AX2): Sei $[x_1,\ldots,x_n]$, $[y_1,\ldots,y_n]$ gemäß (FI2) und u Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\prec)$.

Seien $x_o,y_o \in M := \{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\}$ so, daß

$$u(x_o) = \min_{z\in M} u(z),\quad u(y_o) = \max_{z\in M} u(z).$$

Dann gilt $x_o \preceq z \preceq y_o$ für alle $z\in M$ und wegen (FI3) und der Transitivität von $\preceq^*$ folgt

$$[x_o,\ldots,x_o] \preceq^* [x_1,\ldots,x_n] \preceq^* [y_1,\ldots,y_n] \preceq^* [y_o,\ldots,y_o].$$

Setze $\overline{f} := [x_o,\ldots,x_o]$, $\hat{f} := [y_o,\ldots,y_o]$. Dann gilt

$$\overline{f},\hat{f}\in\mathcal{F},\ \overline{f}(S) = \{x_o\},\ \hat{f}(S) = \{y_o\} \text{ und } \overline{f} \nsim^* \hat{f}.$$

zu (AX3): Klar.

zu (AX4): Sei $f=[x_1,\ldots,x_n]$, $g=[y_1,\ldots,y_n]$ mit $y_i \preceq x_i$ für $i=1,\ldots,n$. Sei u Nutzenfunktion auf $(X,\phi,\preceq)$ mit $u(x_o)=0$. Sei für $(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}$

$$C_{i,j} := \begin{cases} \{s_i\} & , i=j \\ \emptyset & , i\neq j \end{cases},$$ dann folgt (AX4) wie im Beweis zu Satz (6.4).

zu (AX5): Sei $f_n\in\mathcal{F}_o := \{f \mid f\in\mathcal{F},\ x_o \preceq f(s) \text{ für alle } s\in S\}$ und $v_m\in\mathbb{N}$ für alle $m\in\mathbb{N}$ so, daß $\sup_{m\in\mathbb{N}} v_m = 1$ oder $\sup_{m\in\mathbb{N}} v_m = \infty$ sowie

$$v_m u(f_m(s)) \le v_{m+1} u(f_{m+1}(s)) \text{ für alle } s\in S,\ m\in\mathbb{N}.$$

Ferner existiere $f\in\mathcal{F}$ mit

$$u(f(s)) = \sup_{m\in\mathbb{N}} v_m u(f_m(s)) \text{ für alle } s\in S.$$

Behauptung: Es gilt $w(f) = \sup_{m\in\mathbb{N}} v_m w(f_m)$ für jede Nutzenfunktion w auf $(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*)$ mit $w(\overline{f})=0$.

Beweis: Analog zum Beweis von (AX5) im Beweis von Satz (6.2). Man ersetze (FN4) durch (FI3), $\gamma f(s)+(1-\gamma)\overline{f}(s)$ durch $\phi(\gamma;f(s),\overline{f}(s))$, $\gamma f+(1-\gamma)\overline{f}$ durch $\phi^*(\gamma;f,\overline{f})$ und ϕ' durch ϕ^*. Damit ist Satz (6.5) bewiesen.

6.6 Weitere Bemerkung

Zum Abschluß dieses Paragraphen wird noch ein Beispiel für eine Vorbewertungs-Struktur angegeben, das keine Anwendung der in Paragraph 5 referierten Ergebnisse zuläßt, weil weder $\mathcal{F}$ die Menge aller Abbildungen von S in X ist, noch jedes $f \in \mathcal{F}$ nur endlich viele Werte annimmt.

(6.6) Beispiel:

Es sei S ein kompakter Raum, $(X,<)$ die Menge aller reellen Zahlen mit der üblichen Ordnung und $\mathcal{F} := C(S)$ die Menge aller auf S stetigen, reellen Funktionen. Ferner sei $\phi : [0,1] \times X^2 \to X$ definiert gemäß $\phi(\alpha;x,y) := \alpha x + (1-\alpha)y$ (Konvexkombination) sowie $\phi^* : [0,1] \times \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}$ definiert gemäß $\phi^*(\alpha;f,g) := \alpha f + (1-\alpha)g$ (Konvexkombination reeller Funktionen).

Für $f,g \in \mathcal{F}$ gelte $f \prec^* g$ genau dann, wenn $I(f) < I(g)$, wobei I eine positive, lineare Abbildung von $\mathcal{F}$ in IR ist mit $I(\mathcal{O}) \neq I(1)$.

Dann gilt:

$(S,(X,\phi,\prec),(\mathcal{F},\phi^*,\prec^*))$ ist eine Vorbewertungs-Struktur.

Beweis: Sei $\bar{f} := \mathcal{O}$, $\hat{f} := 1$, dann ist die Gültigkeit von (AX1) bis (AX3) unmittelbar klar.

zu (AX4): Sei $f,g \in \mathcal{F}$ mit $g(s) \leq f(s)$ für alle $s \in S$.

Setze $\gamma := \frac{1}{2}$ und $k := f - g$. Dann ist $\gamma \in (0,1)$, $k \in \mathcal{F}$ und es gilt

$$\frac{1}{2} f(s) + \frac{1}{2} \mathcal{O}(s) = \frac{1}{2} g(s) + \frac{1}{2} k(s) \text{ für alle } s \in S.$$

zu (AX5): Es genügt, die Gültigkeit von (AX5) für die spe-

zielle Nutzenfunktion $u = id_X$ auf $(X,\phi,\preceq)$ zu beweisen.

Sei $f_n \in \mathcal{F}^+$ und $v_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so, daß $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = 1$ oder $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = \infty$ sowie $v_n f_n(s) \leq v_{n+1} f_{n+1}(s)$ für alle $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$.

Ferner existiere $f \in \mathcal{F}$ mit $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n f_n$.

Behauptung: Dann gilt $w(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n w(f_n)$ für jede Nutzenfunktion w auf $(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*)$ mit $w(\mathcal{O}) = 0$.

Beweis: Wegen der Linearität von I und der Definition von $\preceq^*$ ist I Nutzenfunktion auf $(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*)$ und es gilt $I(\mathcal{O}) = 0$.

Jede andere Nutzenfunktion w auf $(\mathcal{F},\phi^*,\preceq^*)$ mit $w(\mathcal{O}) = 0$ ist nach Satz (1.6) darstellbar als $w = rI$ mit $r > 0$.

Wegen $\sup_{n\in\mathbb{N}} w(f_n) = r \sup_{n\in\mathbb{N}} I(f_n)$ genügt es, die Behauptung für I zu beweisen.

Fall 1: $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = 1$.

Da S kompakt ist, gilt $\mathcal{F} = C^b(S) := \{f \mid f \in C(S),\ f \text{ beschränkt}\}$.

Sei $\|f\| := \max_{s\in S} |f(s)|$ für alle $f \in \mathcal{F}$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{F}$

$|f| \leq \|f\| \cdot 1$, also $I(f) \leq \|f\| \cdot I(1)$ und $-I(f) = I(-f) \leq \|f\| I(1)$.

Daher gilt $|I(f)| \leq \|f\| I(1)$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

Wegen $f - f_n \in \mathcal{F}$ gilt insbesondere

(i) $0 \leq I(f - f_n) \leq I(1) \|f - f_n\|$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert wegen der punktweisen Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu jedem $s \in S$ ein $n(s,\varepsilon)$ so, daß

$$f(s) - f_{n(s,\varepsilon)}(s) < \varepsilon.$$

Wegen der Stetigkeit von $f - f_n$ existiert zu jedem $s \in S$ eine Umgebung $U(s)$ so, daß

$f(y) - f_{n(s,\varepsilon)}(y) < \varepsilon$ für alle $y \in U(s)$.

Da S kompakt ist, existieren $s_1, \ldots, s_k \in S$ so, daß $S \subset \bigcup_{i=1}^{k} U(s_i)$.

Weil die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton gegen f konvergiert, gilt

für alle $n \geq \max_{1 \leq i \leq k} n(s_i, \varepsilon) =: n(\varepsilon)$ und alle $y \in U(s_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$

$$f(y) - f_n(y) \leq f(y) - f_{n(s_i,\varepsilon)}(y) < \varepsilon.$$

Daher ist $\|f - f_n\| < \varepsilon$ für alle $n \geq n(\varepsilon)$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt mit (i)

$$\lim_{n \to \infty} I(f - f_n) = I(f) - \sup_{n \in \mathbb{N}} I(f_n) = 0, \text{ was zu zeigen war.}$$

Fall 2: $\sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = \infty$.

Dann ist $f_n' := v_n f_n \in \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$f_n'(s) \leq f_{n+1}'(s)$ für alle $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ und

$$f(s) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n'(s) = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n f_n(s) \quad \text{für alle } s \in S.$$

Daher folgt die Behauptung aus Fall 1.

Symbolverzeichnis

(A_i)	8,25
(AX_i)	35,36
$C(S)$	104
$C^b(S)$	105
ε_{m_A}	7
$\mathcal{F}^+$	45
(G_i)	25
$\mathcal{G}(\mathcal{F})$	46
$^B\mathcal{G}(\mathcal{F})$	46
$\mathrm{Inf}\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$	35
(L_i)	6
(LR_i)	28
(LR2')	31
$\mathcal{L}^1(\pi)$	46
Max (f,g)	35
(M_i)	7,14
(M3')	19
(M4')	16
$\mathcal{N}$	67
$\mathbb{R}^+$	8
$\mathbb{R}_o^+$	7
(S_i)	5,6
$(S,(X,\phi,\lambda),(\mathcal{F},\phi^*,\lambda^*))$	35
(X,λ)	6
(X,ϕ)	7
(X,ϕ,λ)	8,25
$[r]$	13
σ	38
1	38
1_A	41
$\|f\|$	45
$\bar{A}$	67

Literaturverzeichnis

[1] Anscombe F.J. und Aumann R.J.:
A definition of subjective probability.
Ann. Math. Statist. 34, 199-205, 1963

[2] Balch M. und Fishburn P.C.:
Subjective expected utility for conditional primitives.
In: Essays on Economic Behavior under Uncertainty. Hrsg. M.S. Balch, D.L. McFadden und S.Y. Wu.
North-Holland, Amsterdam, 57-69, 1974

[3] Bauer H. : Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. 3.Auflage.
Walter de Gruyter, Berlin 1978

[4] Ferguson T.S.: Mathematical Statistics. A decision theoretic approach.
Academic Press, New York 1967

[5] Ferreira P.E.: On subjective probability and expected utilities.
Ann. Math. Statist. 43, 928-933, 1972

[6] Fishburn P.C.: Decision and Value Theory.
Wiley, New York 1964

[7] Fishburn P.C.: Bounded expected utility.
Ann. Math. Statist. 38, 1054-1060, 1967

[8] Fishburn P.C.: Preference-based definitions of subjective probability.
Ann. Math. Statist. 38, 1605-1617, 1967

[9] Fishburn P.C.: A general theory of subjective probabilities and expected utilities.
Ann. Math. Statist. 40, 1419-1429, 1969

[10] Fishburn P.C.: Utility Theory for Decision Making.
Wiley, New York 1970

[11] Fishburn P.C.: Subjective expected utility with mixture sets and boolean algebras.
Ann. Math. Statist. 43, 917-927, 1972

[12] Fishburn P.C.: A mixture-set axiomatisation of conditional subjective expected utility.
Econometrica 41, 1-25, 1973

[13] Fishburn P.C.: Expected utility theories. A review note.
In: Mathematical Economics and Game Theory.
Hrsg. R. Henn und O. Moeschlin.
Springer-Verlag, Berlin, 197-207, 1977

[14] Fuchssteiner B.: Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe und der Satz von Krein-Milman.
Math. Ann. 186, 149-154, 1970

[15] Fuchssteiner B.: Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe und L^p-Räume.
Math. Ann. 186, 171-176, 1970

[16] Hausner M. : Multidimensional utilities.
In: Decision processes. Hrsg. R.M. Thrall, C.H. Coombs und R.L. Davis.
Wiley, New York, 167-180, 1954

[17] Herstein I.N. und Milnor J.:
An axiomatic approach to measurable utility.
Econometrica 21, 291-297, 1953

[18] Jensen N.E. : An introduction to Bernoullian utility theory. I.Utility functions. Swed. J. of Econom. 69, 163-183, 1967

[19] Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P. und Tversky A.: Foundations of Measurement. Volume I. Academic Press, New York 1971

[20] Luce R.D. und Krantz D.H.: Conditional expected utility. Econometrica 39, 253-271, 1971

[21] Luce R.D. und Raiffa H.: Games and Decisions. Introduction and critical survey. Wiley, New York 1957

[22] Marschak J.: : Rational behavior, uncertain prospects, and measurable utility. Econometrica 18, 111-141, 1950

[23] von Neumann J. und Morgenstern O.: Theory of games and economic behavior. 3.Auflage. Princeton University Press, Princeton 1953

[24] Pfanzagl J. : Theory of measurement. Wiley, New York 1968

[25] Richter H. : Wahrscheinlichkeitstheorie. 2.Auflage. Springer-Verlag, Berlin 1966

[26] Savage L.J. : The Foundations of Statistics. Wiley, New York 1954

[27] Skala H.J. : Non-archimedian utility theory. D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht 1975

[9] Fishburn P.C.: A general theory of subjective probabilities and expected utilities.
Ann. Math. Statist. 40, 1419-1429, 1969

[10] Fishburn P.C.: Utility Theory for Decision Making.
Wiley, New York 1970

[11] Fishburn P.C.: Subjective expected utility with mixture sets and boolean algebras.
Ann. Math. Statist. 43, 917-927, 1972

[12] Fishburn P.C.: A mixture-set axiomatisation of conditional subjective expected utility.
Econometrica 41, 1-25, 1973

[13] Fishburn P.C.: Expected utility theories. A review note.
In: Mathematical Economics and Game Theory.
Hrsg. R. Henn und O. Moeschlin.
Springer-Verlag, Berlin, 197-207, 1977

[14] Fuchssteiner B.: Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe und der Satz von Krein-Milman.
Math. Ann. 186, 149-154, 1970

[15] Fuchssteiner B.: Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe und L^p-Räume.
Math. Ann. 186, 171-176, 1970

[16] Hausner M. : Multidimensional utilities.
In: Decision processes. Hrsg. R.M. Thrall, C.H. Coombs und R.L. Davis.
Wiley, New York, 167-180, 1954

[17] Herstein I.N. und Milnor J.:
An axiomatic approach to measurable utility.
Econometrica 21, 291-297, 1953

[18] Jensen N.E. : An introduction to Bernoullian utility theory. I.Utility functions. Swed. J. of Econom. 69, 163-183, 1967

[19] Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P. und Tversky A.: Foundations of Measurement. Volume I. Academic Press, New York 1971

[20] Luce R.D. und Krantz D.H.: Conditional expected utility. Econometrica 39, 253-271, 1971

[21] Luce R.D. und Raiffa H.: Games and Decisions. Introduction and critical survey. Wiley, New York 1957

[22] Marschak J.: : Rational behavior, uncertain prospects, and measurable utility. Econometrica 18, 111-141, 1950

[23] von Neumann J. und Morgenstern O.: Theory of games and economic behavior. 3.Auflage. Princeton University Press, Princeton 1953

[24] Pfanzagl J. : Theory of measurement. Wiley, New York 1968

[25] Richter H. : Wahrscheinlichkeitstheorie. 2.Auflage. Springer-Verlag, Berlin 1966

[26] Savage L.J. : The Foundations of Statistics. Wiley, New York 1954

[27] Skala H.J. : Non-archimedian utility theory. D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht 1975

Lebenslauf

Am 25. März 1951 wurde ich als Tochter des Pastors Bruno Karl Quiring und seiner Ehefrau, der praktischen Ärztin Dr. med. Elisabeth Quiring, zu Frankfurt am Main geboren.

Meine Schulausbildung erhielt ich in Offenbach am Main. Im Juni 1969 legte ich an der Rudolf-Koch-Schule zu Offenbach die Reifeprüfung ab.

Im WS 1969/70 begann ich in Frankfurt Medizin zu studieren. Im SS 1970 wechselte ich zum Studium der Mathematik und Musik über. Dieses Studium setzte ich in den beiden folgenden Semestern an der Universität Stuttgart und der dortigen Musikhochschule fort. Vom WS 1971/72 an studierte ich an der Universität Marburg Mathematik mit dem Nebenfach Psychologie.

Im SS 1973 legte ich die Dilpom-Vorprüfung ab und im Dezember 1976 die Diplom-Hauptprüfung.
Während des gesamten Studiums war ich Stipendiatin des Evangelischen Studienwerkes Villigst.

Von Februar bis Oktober 1977 war ich an der Technischen Hochschule Darmstadt und im WS 1978/79 an der Universität Marburg als Wissenschaftliche Hilfskraft angestellt.

Seit Oktober 1977 werde ich vom Evangelischen Studienwerk mit einem Promotions-Stipendium gefördert.